BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIII
B
47
NAPOLI

ELEMENTI
D' ARITMETICA

DI

FRANCESCO SOAVE

C. R. S.

Ad uso delle Scuole d' Italia.

Trattato il più chiaro preciso e facile onde imparare l' Aritmetica anche senza la voce del Maestro.

PRIMA EDIZIONE NAPOLETANA.

PARTE TERZA.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE DI NAPOLI

NAPOLI 1802.

PRESSO MICHELE MORELLI

Si vende dai Libraj d' Onofrio, Palma, e Turris alla strada di S. Liguoro.

Con licenza de' Superiori.

SEZIONE VI.

Delle alligazioni, o mescolanze di merci o di metalli.

Per alligazioni di merci o di metalli s' intende la mescolanza di più merci o metalli di diversa qualità, o diverso valore, per avere una merce, o un metallo di una qualità, o di un valore determinato.

Benchè tanto nelle alligazioni delle merci, come in quelle de' metalli i Quesiti si risolgano colle medesime regole, tuttavia per maggior chiarezza distingueremo le une dalle altre, incominciando dalle prime.

CAPO I.

Delle Alligazioni delle Merci.

Nelle alligazioni due casi principalmente son da distinguersi: 1. quando date le parti del misto si cerca il suo valore; 2. quando dato il valore si cercan le parti da mescolarsi.

ARTICOLO I.

Dato il misto cercarne il valore.

Allorchè date le parti che si son mescolate col rispettivo valor di ciascuna, si cerca il valore del misto, si opera come negli adequati semplici (pag. 127 e 164),

vale a dire 1. dispongonsi l'una sotto all'altra in colonna le dette parti; a destra delle medesime si segna il valor di ciascuna; e a destra di questo si segna il prodotto di ciascuna delle parti moltiplicare pel loro valore.

2. Si fa la somma delle parti mescolate, e la somma de' prodotti delle medesime pel loro valore.

3. Si divide la somma dei prodotti per la somma delle parti mescolate; e il quoto dà il valore del misto.

Eccone due esempi.

QUESITO I. *Uno ha mescolato brente 4 di Vino da l. 15 con br. 2 da l. 18; domandasi quanto debba valere una brenta di questo composto?*

Brente		Valore		Prodotti
4	+	lir. 15.	=	lir. 60
2	+	lir. 18	=	lir. 36
Somme Br. 6				lir. 96

Valore di una brenta del misto (dividendo 96 per 6) lir. 16.

La ragione di questa operazione è chiara per se medesima; perchè se le 6 brente del misto valgono prese insieme lire 96, il valore di una brenta deve essere eguale a 96 diviso per 6, cioè a lire 16. Che poi questo valore sia proporzionato alle parti che si son mescolate, si conoscerà osservando, che siccome ogni brenta del misto contiene $\frac{2}{3}$ della prima qualità, e $\frac{1}{3}$ della seconda; così il valore deve essere eguale

$\frac{1}{3}$ di lire 15, cioè a lire 10, e ad $\frac{1}{3}$ di
: 18, cioè a lire 6, che prese insieme
lire 16.

La pruova si avrà esaminando, se le 6
:nte del misto a lire 16 rendono egual-
:nte, come le 4 a l. 15, più le 2 a l. 18;
: qui infatti danno egualmente l. 96.

QUESITO II. " In una botte si sono po-
9 brente di Vino da l. 24, 4 brente da
20, e vi si è aggiunta 1 brenta d'acqua;
.nto varrà ogni brenta del misto "?

Br.	9	+ lir.	24	= 216
	4	+ lir.	20	= 80
	1	+ lir.	0	= 0

nme Br. 14 lir. 296
ore di ogni brenta - lir. 21. 2. 10. $\frac{2}{7}$

ARTICOLO II.

Dato il valore cercar le parti da mescolarsi.

ER procedere in questo più chiaramente,
minceremo dalla mescolanza di due spe-
poi verremo a quella di 3, di 4, e di
te si vogliano.

uesito I. " Voglionsi mescolare in una
: di 6 brente due specie di Vino, l'
A del valore di l. 15 alla brenta, e
ro *B* del valore di l. 18, e vuolsi che
isto abbia per ogni brenta il valore di
; quante brente s'avranno a prendere
una o dell' altra specie "?

Si

Si cominci in 1. luogo a scrivere i due valori 15 e 18 l'un sotto all'altro in colonna; in fuori a sinistra si scriva fra l'uno e l'altro il valore del misto, che è 16; e a destra si tiri una linea perpendicolare.

2. Si paragoni il valore di ciascuna specie col valore del misto, e le differenze si segnino alla destra della linea perpendicolare in ordine inverso, cioè la differenza di *A*, che è 1. si segni accanto a *B*, e quella di *B*, che è 2. accanto ad *A*.

3. Si sommino le differenze, e s' istituiscano due Regole di proporzione, mettendo in amendue per primo termine la somma delle differenze, che è lire 3; per secondo la somma delle parti, di cui il misto deve esser composto, che è Br. 6; per terzo la differenza segnata accanto a ciascuna specie; e i quarti termini daranno le parti, che di ciascuna specie s' avranno a prendere.

Ecco tutta l'operazione

	Valori	Differenze
Misto l. 16.	*A* l. 15	2
	B l. 18	1
Proporzioni		l. 3 : Br. 6 :: l. 2 : Br. 4 *A*
		3 : 6 :: 1 : 2 *B*

Somma delle Brente . . 6

Per formare adunque con due Vini l'uno da lire 15, e l'altro da lire 18 un com-

po-

to di 6 Brente da lire 26 si dovran pren-
e 4 Brente del primo, e 2 del secondo.
Per averne la pruova si osservi primie-
nente, se la somma de' quarti termini
risponde al secondo termine, cioè se la
mma delle parti da mescolarsi corrispon-
all'intero composto; in secondo luogo
vegga se le parti moltiplicate pel rispet-
o valore rendon lo stesso, come tutto
nisto moltiplicato similmente pel suo va-
. Quì infatti Br. 4, e Br. 2 fan 6 ap-
to, e moltiplicando Br. 4 per lire 15, e
2 per lire 18 avremo lire 60, e lire 36,
prese insieme fan lire 96, egualmente
e moltiplicando brente 6 per lire 16.
In'altra pruova si può avere riducendo
Quesito dal secondo al primo caso, cioè
ando giusta l' Articolo precedente, se
alore del misto risulta a lire 16: al qual
abbiamo quì ripetuto espressamente lo
o Quesito in senso contrario.
ragione poi, per la quale si dee in
e operazioni la differenza del maggior
e segnar accanto al minore, e vice-
, si è che dovendosi dai due valori
18 cavare il valor 16, che è fra l' u-
l'altro, è necessario che del minor
e 15 si prenda una maggior quantità,
maggior valore 18 se ne prenda una
re, compensando così la quantità col
e; e però che invece delle propor-
:

3 : 6

3 : 6

3 : 6 : : 1 : *A*
3 : 6 : : 2 : *B*

che darebbero un risultato falso, cambinsi le differenze, e si dica:

3 : 6 : : 2 :
3 : 6 : : 1 :

che daranno il vero ricercato.

QUESITO II. *Uno ha tre qualità di Frumento*: A *da lire* 25 *al moggio*, B *da lire* 27, C *da lire* 30, *e vuol formarne un misto di* 50 *moggia da lire* 28, *quante moggia da ciascuna qualità dovrà prenderne?*

1. Si scrivano in colonna come sopra i valori *A*, *B*, *C*.

2. Fra i due valori *B* e *C* l' uno prossimamente minore, e l' altro prossimamente maggiore si scriva in fuori a sinistra il valore del misto.

3. Si comincino a paragonare come sopra i valori di *A* e *C* col valore del misto, segnandone le differenze in ordine inverso, il che si chiama *mescolare A con C*.

4. Si mescoli allo stesso modo *B* con *C*.

5. Le due differenze segnate accanto a C si sommino, e si prenda la loro somma, come se formasse una differenza sola.

6. Si sommino insieme tutte le differenze; e s' istituiscano, come sopra, tre Regole di proporzione.

I quarti termini daranno le quantità di Moggia che avranno a prendersi d' ogni specie.

Ecco tutta l' operazione.

Va-

	Valori	Differenze
	A l. 25	—— 2
	B l. 27	—— 2
Misto, l. 28		
	C l. 30	3 + 1 = 4

Proporzioni

l. 8. M. 50 : : l. 2. M. $12\frac{1}{2}$ *A*

2. $12\frac{1}{2}$ *B*

4. 25 *C*

Somma delle Moggia . . . 50

Quesito III. "Uno ha quattro qualità d'una stessa droga, delle quali *A* vale soldi 17, 9 all'oncia, *B* sol. 24, *C* sol. 26, 6, *D* sol. 32, 6; vuol formarne once $29\frac{3}{4}$ del valore di soldi 22, 6. Quanto ne dovrà prendere di ogni qualità"?

Il valore del misto quì sta fra i due valori *A* e *B*. Si dovrà dunque *A* mescolare con *B*, con *C*, e con *D* (dovendosi prender sempre in ogni confronto un valor minore, e un valor maggiore del misto, perchè col mettere le differenze al contrario, il minor valore sia compensato dalla maggior quantità e viceversa). L'operazione adunque si farà nel modo seguente:

	Valori	Differenze
	A ss. 17, 9	1, 6 + 4 + 10 = 15, 6
Misto ss. 22, 6		
	B 24,	. . . 4, 9
	C 26, 6	. . . 4, 9
	D 32, 6	. . . 4, 9

Somma delle differenze . . . ss. 29, 9

Trovata questa s' istituiscano come sopra quattro Regole di Proporzione, e i quarti termini daranno il numero delle Once che avranno a prendersi di ciascuna qualità. Avremo adunque:

Sol. 29, 9: On. $29\frac{3}{4}$: : Sol. 15,6 : On. $25\frac{1}{2}$ *A*
4,9 : $4\frac{3}{4}$ *B*
4,9 : $4\frac{3}{4}$ *C*
4,9 : $4\frac{3}{4}$ *D*

Somma delle Once . . . $29\frac{3}{4}$

AVVERTIMENTO. Se il valore del misto fosse stato per esempio soldi 25, allora si sarebbe scritto fra *B* e *C*, e la mescolanza sarebbesi potuta fare in due modi, cioè primo mescolando *A* con *C*, e *B* con *D*; secondo mescolando *A* con *D*, e *B* con *C*, bastando sempre il prendere a confronto un valor minore, e un maggiore del misto.

All' incontro se il valore del misto fosse stato per esempio soldi 28, sarebbesi scritto fra *C* e *D*, e sarebbesi fatta la mescolanza di *D* coi tre altri *A*, *B*, *C*.

Allo stesso modo si proceda qualunque sia il numero delle specie date, scrivendo sempre il valore del misto fra i due a lui più vicini, e prendendo sempre da mescolarsi insieme un valor minore, e un maggiore del misto. Ecco di ciò pure un esempio.

QUESITO IV. *Uno ha per sei specie di Vino, o di Grano, o di qualunque altra cosa, i cui prezzi sono* A *lire* 22, B 24, C 26, D 28, E 30, F 32, *e vuol formarne un composto di* 100 *brente o moggia pel valore di lire*

lire 29 alla brenta o al maggio; domandasi quanto ne dovrà prendere d' ogni specie?

Per vedere in quanti modi qui possan farsi le mescolanze segniamo prima in colonna i valori delle specie, e quello del misto. Avremo dunque

A	lir. 22
B	24
C	26
D	28
Misto lire	29
E	30
F	32

Il valore del misto è fra *D* ed *E*. Prendendo adunque sempre un valore al dissopra, e l'altro al disotto del misto, potrà mescolarsi:

1. *A* con *F*; e *B*, *C*, *D* con *E*.
2. *A* con *E*; e *B*, *C*, *D* con *F*.
3. *A*, e *B* con *E*; *C*, e *D* con *F*.
4. *A*, e *C* con *E*; *B*, o *D* con *F*.
5. *A*, e *D* con *E*; *B*, e *C* con *F*.
6. *A*, e *D* con *F*; *B*, e *C* con *E*.
7. *A*, e *B* con *F*; *C*, e *D* con *E*.
8. *A*, e *C* con *F*; *B*, e *D* con *E*.

In qualunque delle accennate otto maniere facciansi le mescolanze, la soluzione del Quesito sarà sempre esatta; e se premerà di mescolare maggior quantità d'una specie, che delle altre, si sceglierà quella maniera, in cui la differenza segnata accanto alla detta specie riesca maggiore; e si farà viceversa quando di una o più specie si abbia premura di mescolare una quantità

minore. Nella prima maniera a cagion d'esempio la maggior quantità si verrà a prender da *E*, e le minori da *B*, *C*, e *D*. Ecco tutta l'operazione.

Valori		Differenze				
A	l.22	.	.	.	.	3
B	24	.	.	.	.	1
C	26	.	.	.	.	1
D	28	.	.	.	.	1
Misto	l.29					
E	30	5	+ 3	+ 1	=	9
F	32	.	.	.	.	7

Somma delle differenze . lir. 22

Istituendo, come sopra, sei Regole di Proporzione, avremo:

lir. 22 . 100 ::	lir.	3	: 13 $\frac{\frac{1}{2}\frac{4}{2}}{2}$	*A*
		1	: 4 $\frac{\frac{1}{2}\frac{2}{2}}{2}$	*B*
		1	: 4 $\frac{\frac{1}{2}\frac{2}{2}}{2}$	*C*
		1	: 4 $\frac{\frac{1}{2}\frac{2}{2}}{2}$	*D*
		9	: 40 $\frac{\frac{2}{2}\frac{1}{2}}{2}$	*E*
		7	: 31 $\frac{\frac{1}{2}\frac{8}{2}}{2}$	*F*

Somma delle Br.o Mog. 100 —

AVVERTIMENTO. Quando il valore del misto è minore di quello di ciascuna specie data, ciò indica che vi si dee mescolar qualche cosa di niun valore.

Questa in tal caso si segna zero, e nel resto si procede come sopra. Eccone alcuni esempi.

Quesito V. "Uno ha del Vino, cui vende soldi 7 al boccale, e vorrebbe poterlo vendere soldi 6 senza perdervi. Si domanda quant'acqua vi debba aggiungere"?

Va-

Valori	Differenze
ss.0	1
Misto.ss.6	
ss.7	6

Proporzioni
ss.7: Boc. 1:: ss.1 : Boc. $\frac{1}{7}$ acqua
6: $\frac{6}{7}$ vino

Dovrà adunque mescolare $\frac{6}{7}$ di Vino, e $\frac{1}{7}$ d'acqua per ogni boccale.

AVVERTIMENTO. Senza la succennata operazione però quì basta il dire: quanta è la differenza da 7 a 6, tant' acqua si deve aggiugnere, cioè 1 boccale ogni 7, ovvero $\frac{1}{7}$ ogni boccale.

Quesito VI. "Si han tre specie di Vino, che valgono *A* ss. 5, *B* ss. 6, *C* ss. 7 al boccale; vorrebbonsi comporre 36. brente in maniera da poter venderle senza perdita ss. 4 al boccale. Domandasi quanto Vino si debba prendere d' ogni specie, e quant' acqua vi s'abbia ad aggiugnere"?

Valori	Differenza
ss. 0	1 + 2 + 3 = 6
Misto ss. 4	
A 5	. . . 4
B 6	. . . 4
C 7	. . . 4

Proporzioni
ss.18:Br.36 :: ss.6:Br.12 acqua
4: 8 *A*
4: 8 *B*
4: 8 *C*

Somma della brente . . 36

Dovransi prendere adunque 8 brente di ogni specie di Vino, e aggiugnervi 12 brente d' acqua.

Quesito VII." Si han come sopra 3 specie di Vino, *A* da ss. 5, *B* da ss. 6, *C* da ss. 7 al boccale; e prendendone d' ogni specie egual quantità, si vuol mescolarvi, quant' Acqua si dovrà aggiungere "?

Quì tre boccali, uno di ciascuna specie valgono in tutto ss. 18, e questi venduti a ss. 4 dan solamente ss. 12. Basta adunque il dire: Quanta è la differenza da 18 a 12, tant' acqua si deve aggiungere, cioè 6 boccali ogni 18, ovvero $\frac{1}{3}$ ogni boccale.

Quesito VIII." Si han come sopra tre specie di Vino *A* da ss. 5, *B* da ss. 6, *C* da ss. 7; e prendendone da *A* 12 boccali, da *B* 6, da C 3 si vuol mescolarvi tant' acqua da vendere ciò che risulta ss. 4 al boccale. Quant' acqua si deve aggiungere "?

Si faccia prima la somma dei boccali, e quella dei lor valori

A	12	a ss.	5	. . ss.	60
B	6	a ss.	6	. . ss.	36
C	3	a ss.	7	. . ss.	21
Somme Boc.	21			ss.	117

Si cerchi in seguito quanto danno boccali 21 a ss. 4, che è ss. 84.

Poi s' istituisca una proporzione inversa, dicendo: se ss. 117 danno bocc. 21; ss. 84 quanti ne daranno? e moltiplicando il primo col secondo termine, e dividendo il prodotto pel terzo avremo boc. 29. $\frac{1}{4}$; indi-

dizio che ai boc. 21 di Vino dovranſi aggiugnere boc. 8 $\frac{1}{4}$ d' Acqua.

Pruova. Si moltiplichino i boc. 29 $\frac{1}{4}$ per ss. 4, e n'usciran come sopra s^c. 117.

Quesito IX. *Uno ha moggia* 58 *di frumento sceltissimo, che gli coſta in tutto lire* 2552. *e ne ha di quello che gli coſta ſoltanto lire* 3, 2, 6 *allo ſtajo; domandaſi quante moggia dovrà levare dalle* 58 *della prima qualità, e ſoſtituirne della sesonda per ricavarne lo steſſo prezzo lire* 2552, *e guadagnarvi lire* 6 $\frac{1}{3}$ *per* 100?

Dividendo lire 2552 per moggia 58, il prezzo della prima qualità sarà lire 44 al moggio.

Moltiplicando lire 3, 2, 6 per 8 staja, il prezzo della prima qualità sarà lire 44 al moggio.

Moggia 58 della seconda qualità a l. 25 porterebbero l. 1450 che sottratte da l. 2552 danno la differenza di l. 1102, esprimente il guadagno che si farebbe vendendo le 58 moggia della seconda qualità al prezzo della prima.

Ma volendo fare il sol guadagno di l. 6 $\frac{1}{3}$ per 100, si cerchi prima a quanto debba montare questo guadagno, dicendo: se lire 106 $\frac{1}{3}$ debbon venire dal capitale, lire 2552 da qual capitale doviau venire? Il quarto termine sarà lire 2400, che sottratte da lire 2552 daranno lire 152 di guadagno.

Dopo questo si dica: se l. 1102 son guadagnate da moggia 58 della seconda quali-

tà sostituite alla prima; lire 152 da quante moggia si guadagneranno? Il quarto termine sarà moggia 8. Tante adunque dovran levarsi dalla prima qualità, e sostituirsi della seconda.

Pruova.	Mogg. 50 a l. 44 costano	l. 2200
	Moggia 8 a l. 25 .	l. 200
	Somma del costo .	l. 2400
	Si vendono . . .	l. 2552
	Guadagno . . .	l. 152

Quesito X. *Uno ha comperato del Vino a lire 21, 12 la brenta, e levandone per ogni brenta una certa porzione, e sostituendovi altrettanta acqua l' ha rivenduto allo stesso prezzo con guadagnarvi il 20 per 100; domandasi quanto Vino abbia levato per brenta, e quant' acqua vi abbia sostituito?*

Dividendo l. 21, 12, ossia soldi 432 per boccali 96, risulterà il prezzo a soldi 4, 6 al boccale.

Ciò posto si dica in primo luogo: se lire 100 vengono dal capitale lire 100; lire 213. 12 da qual capitale dovran venire? Il quattro termine sarà lire 18, che sottratte da lire 21, 12 daranno lire 3, 12 di guadagno per ogni brenta.

Dopo questo si cerchi quanti boccali a soldi 4, 6, ossia a 9 mezzi soldi stieno in lire 3, 12, ossia in 144 mezzi soldi. Il quoto sarà boccali 16, e tanti appunto n' avrà egli levato per brenta sostituendo invece altrettanta acqua.

Pruo-

Pruova. Boc. 80 di vino a ss. 8, 6 dan lir. 18,
Bocc. 16 d' acqua . . lir. —

Costo d' una brenta . lir. 18,
Vendita . . . . . lir. 21, 12

Guadagno . . lir. 3, 12

CAPO II.

Delle Alligazioni de' Metalli.

ORo o argento *fino* si chiama quello, che è tutto puro, e senza mescolanza d' altro metallo.

Oro o argento *con lega* si dice quello, a cui è mescolato altro metallo, che comunemente suol essere il rame.

L' oro fino si dice di 24 carati, o denari, perchè in esso i 24 denari, che formano un' oncia son tutti di oro puro.

L' argento fino si dice di 12 carati o denari, perchè in esso i 12 denari, che formano una mezz' oncia son tutti di puro argento.

La lega adunque dell' oro si fa col mescolare in un' oncia più o meno denari di rame, e la lega dell' argento col mescolare più o meno denari di rame in una mezz' oncia.

Quando dicesi che l' oro, per esempio, è di 22 carati, o a bontà, o a titolo di 22, intendesi che in un' oncia esso contiene 22 denari d' oro puro o fino, e 2 danari di rame o lega.

Similmente quando dicesi che l'argento, per esempio, è a bontà, o a titolo di 10, 9, s'intende che in mezz'oncia esso contiene denari 10, e grani 9 d'argento fino, e denaro 1, grani 15 di lega.

Non resta altro che ricordare ciò che abbiamo già avvertito nella I. Parte Sez. II. Cap. II. Art. I., che il peso di un marco equivale ad once 8.

Ciò premesso esporremo i principali Quesiti, che posson farsi intorno alle Alligazioni de' metalli, da' quali risulteranno le regole che in ciò debbon tenersi, incominciando da alcuni Quesiti preliminari.

Articolo I.
Quesiti preliminari.

Quesito I. " Uno ha un pezzo d'argento di marchi 20 once 6 a bontà, o a titolo di den. 11, 10. Domandasi quanto contenga d'argento fino, e quanto di lega "?

Benchè l'operazione quì possa farsi dicendo direttamente, se mezz'oncia, o den. 12 contengono den. 11, 10 d'argento fino; Marchi 20 On. 6 quanto ne conterranno? pure da noi si farà sull'oncia intera, perchè più facile in seguito riuscirà l'operazione della pruova.

Si cominci dunque a dire: se mezz'oncia contiene den. 11, 10 d'argento fino, un'oncia ne conterrà den. 22, 20.

Poi dicasi; se un'oncia, o den. 24 contengon di fino den. 22, 20; Marchi 20, On.

On. 6 quanto ne conterranno? e s' intavoli la proporzione.

Den. 24 | Den. 22, 20 | Marc. 20, 6

Riducendo i due termini simili, che in questa intavolazione sono il primo e il secondo, alla medesima specie, col moltiplicarli per 6, giacchè 6 fia 20 dà 220 gr., che divisi per 24 fan 5 denari, avremo

144 | 137 | Marc. 20, 6

Prod. del 2. nel 3. term. Marc. 2842, 6

Quoto della div. pel 1. M. 19. on. 5. den. 22. gr. 8

E sottraendo questo dall' intero peso . . M. 20. 6 — . —

resteranno di lega Marc. 1 — 1. 16

Pruova. Questa si fa cercando invece quanto vi si contenga di lega.

Si dica adunque: se den. 24 contengon di lega den. 1, 4; Marc. 20, 6 quanto ne conterranno? e s' intavoli:

Den. 24 | Den. 1. 4 | Marc. 20, 6

Moltiplicando però il primo e secondo termine

144 | 7 | Marc. 20, 6

Prod. del 2do. nel 320. term. Marc. 145. 2

Quoto della div. pel 1mo. M. 1. — 1, 16.

QUESITO II. *Si ha once 18 d' argento fino, e si vuol che diventi a bontà solamente di den. 10. 12. Si domanda quanta lega vi si dovrà aggiugnere?*

Alla bontà di den. 10, 12, in un' oncia s' avranno den. 21 d' argento fino, e den. 3 di lega.

Si dica adunque: se a den. 21 di fino si aggiungono den. 3 di lega; ad on. 18 quan-

ta lega dovrà aggiungersi, e l'intavolazione sarà

Den. 21 | Den. 3 | On. 18.
Prod. del 2do. nel 3zo. term. On. 54
Quoto della div. pel 1. On. 2 $\frac{12}{21}$, o $\frac{4}{7}$
che aggiunte all' argento fino . . . On. 18

daran in tutto di peso. On. 20. $\frac{4}{7}$

Per pruova si dica: se Once 20 $\frac{4}{7}$ contengono di lega On. 2 $\frac{4}{7}$; den. 24 quanta ne conteranno? e il quarto termine sarà den. 3.

Quesito III. *Si sono aggiunte ad once* 14 *d'oro, non si sa di quale finezza, on.* 2 *di rame, e il composto è risultato della finezza di carati* 20, 12. *Domandasi di che finezza erano le on.* 14?

Aggiungendo alle on. 14 d'oro le on. 2 di rame, il composto è riuscito di oncie 16.

Si dica adunque: se on. 16 sono alla bontà di Den. 20, 12; le oncie 14 di che bontà erano? E quì si osservi, che la Proporzione è inversa, perchè il maggior peso suppone aggiunta maggior lega, e per conseguenza minor bontà, e viceversa.

Moltiplicando adunque il 1. col 2. termine, e dividendo pel 3, avrem per quoto den. 23 $\frac{3}{7}$ esprimenti la bontà delle on. 14.

Quesito IV. *Uno col raffinare on.* 28 *di argento del titolo di den.* 10 *l'ha ridotto ad on.* 24; *domandasi di che titolo saranno ora le* 24 *once?*

L'argento si raffina o nella coppella per mez-

mezzo del piombo, o nel crociuolo per mezzo del nitro.

La coppella è un picciol vaso fatto per lo più di ceneri di corna o d'ossa, che oltre alla proprietà di resistere al fuoco, ha quella di assorbire i metalli allorchè sono dal fuoco vetrificati. Or siccome tutti i metalli eccetto l'oro e l'argento nel fuoco si vetrifican facilmente per mezzo del piombo; così facendo fondere nella coppella insieme col piombo l'argento che vuol raffinarsi, il metallo ch'è unito all'argento, vetrificandosi insieme col piombo, resta assorbito di mano in mano dalla coppella, e lascia l'argento sempre più puro.

Il crociuolo è un vaso di terra pur resistente al fuoco. Vi si fa fonder l'argento, poi vi si mette del nitro con un po' di borace, questi s'incorporan di mano in mano colla lega che è nell'argento, e formano una scoria, levando la quale l'argento resta di mano in mano più puro.

Ciò premesso, per risolvere il presente Quesito si dica: se on. 28 eran del titolo di den. 10; on. 24 di che titolo saranno? e quì pure la proporzione è inversa, perchè quanto più l'argento scema di peso nella raffinazione, tanto più cresce in bontà, perdendo la lega.

Moltiplicando adunque il 1. col 2. termine, e dividendo pel 3, avrem per quoto den. 11, 16 esprimenti il titolo delle on. 24.

QUESITO V.° Once 24 d'oro col raffinar-

narle son diventate once 20 del titolo di 22 carati. Domandasi di quanti carati eran avanti la raffinazione le on. 24"?

L'oro può raffinarsi come l'argento per mezzo del piombo e del nitro; ma senza aggiungervi il borace che ne guasta il colore. Il miglior metodo però è di raffinarlo nel crociuolo per mezzo dell'antimonio, che incorporandosi di mano in mano con tutti gli altri metalli, e ancor coll'argento, forma una scoria, tolta la quale rimane l'oro sempre più puro.

Ciò posto si dica: se on. 20 sono di 22 carati; di quanti carati erano le on. 24? ed essendo quì pure la proporzione inversa, moltiplicando il 1. col 2. termine, e dividendo pel 3, avremo per quoto carati o denari 18 $\frac{1}{3}$ esprimenti il titolo che avevano le 24 once.

Articolo II.

Data la bontà o titolo de' componenti, trovare la bontà o il titolo del composto.

Come quì trattasi di cercare la bontà o il titolo medio fra quelli de' componenti, così dee procedersi colla regola degli adequati, come nell'Art. I. dell'Alligazioni delle merci. Eccone alcuni esempi.

Quesito I. „ Si son legate on. 16 d'argento a bontà di den. 11, 12 con on. 10 a bontà di den. 8, 21. Domandasi di che bontà sia composto"?

1. Dispongansi i componenti l'un sotto all'

all' altro ; 2. si moltiplichi ciascun di essi pel suo titolo, e un sotto all'altro dispongansi i prodotti; 3. la somma dei prodotti dividasi per la somma de' componenti, e il quoto darà il titolo, o la bontà del composto.

Ecco tutta l'operazione.

Componenti		Titolo		Prodotto
On. 16	×	Den. 11,12	=	Den. 184
On. 10	×	Den. 8,21	=	Den. 88 $\frac{3}{4}$
Som. On. 26				Den. 272 $\frac{3}{4}$

Dividendo la somma a dei prodotti per la somma de' componenti ; il quoto den. 10, 11 $\frac{10}{11}$ esprimerà la bontà del composto.

QUESITO II. *Si sono unite on. 10 d' argento a bontà di den. 10, 20 con on. 15 d' argento fino, e si sono aggiunte on. 2 di lega. Si domanda la bontà del composto?*

La bontà della lega non si valuta per nulla. L'esposizione, e soluzione adunque sarà :

Componenti		Titolo		Prodotto
On. 10	×	Den. 10, 20	=	Den. 108,8
On. 15	×	Den. 12,..	=	Den. 180,-
On. 2	×	Den. --,--	=	Den.-----,-
Somme On. 27				Den. 288, 8

Bontà del composto: 10, 16 $\frac{8}{27}$

QUESITO III. *Si sono unite on. 6 d' oro da carati o den. 18, con on. 8, da 20 $\frac{1}{2}$, e on. 4 da 22; domandasi la bontà del composto?*

Com-

Componenti		Titolo		Prodotto
On. 6	X	Den. 18	==	Den. 108
On. 8	X	Den. 20 $\frac{1}{2}$	==	Den. 164
On. 4	X	Den. 22	==	Den. 87
Somme On. 18				350

Bontà del composto: Den. 20.

QUESITO IV. *Essendosi legate insieme tre qualità d'oro, cioè on. 6 da 18, on. 8 da 20 $\frac{1}{2}$, e altre once non si sa quante, nè di che titolo, son risultate on. 18 di 30 carati; domandasi la quantità e qualità del terzo oro?*

Questo Quesito può servir di pruova al precedente. Noi premetteremo l'operazione, e ne daremo la spiegazione in appresso.

Componenti		Titolo		Prodotto
On. 6	X	Den. 18	=	Den. 108
On. 8	X	Den. 20	=	Den. 164
Somme. On. 14				Den. 272
Composto On. 18	X	Den. 20	=	Den. 360
Residui. On. 4				Den. 88

Diviso un residuo per l'altro, il quoto 22 esprimerà la bontà del terzo oro, il cui peso deve essere stato on. 4.

Spiegazione. Si comincia a cercar la somma dei due componenti noti, che danno on. 14, e la somma dei lor prodotti pel rispettivo titolo, che fanno Den. 272; poi si moltiplica la quantità del composto pel suo titolo, e se ne ne cerca il prodotto, che è

Den.

Den. 360. Da questo prodotto si sottrae la somma de' prodotti precedenti, e dalla quantità del composto on. 18 si sottrae la somma dei due componenti noti on. 14. Si divide un residuo per l'altro; il quoto dà il titolo, e il residuo della quantità del composto dà il peso ricercato del terzo componente.

QUESITO V. *Uno ha on.* 10 *d' oro da* 22, *e on.* 5 *da* 20, *e vuol abbassarlo a* 18; *domandasi quanta lega vi dovrà aggiungere?*

Si cerchi prima il titolo medio delle due qualità date.

On. 10 × Den. 22 = Den. 220
On. 5 × Den. 20 = Den. 100

Somme. On. 15 Den. 320

Titolo medio delle qualità date. Den. 21 $\frac{1}{4}$.

Poi dicasi: se la bontà den. 21 $\frac{1}{3}$ porta on. 15; la bontà den. 18 quante once porterà? Questa proporzione è manifestamente inversa, perchè la minor bontà suppone che ivi sia aggiunta maggior lega, e per conseguenza maggior peso. Moltiplicando adunque il primo col secondo termine, e dividendo pel terzo, avremo per quoto on. 17 $\frac{7}{9}$, e perciò si dovranno alle suddette on. 15 aggiungere on. 2 $\frac{7}{9}$ di lega.

QUESITO VI. Si hanno onc. 15 d'oro da 20, e on. 5 da 18, e si vuol alzarlo alla bontà di 22. Domandasi quanto oro fino dovrassi aggiugnere?

Qui

Qui convien prima cercare la lega media delle due qualità date.

Or la prima qualità avrà Den. 4 di lega, e la seconda n'avrà den. 6. Si dica adunque:

On. 15	×	Den. 4	=	Den. 60
On. 5	×	Den. 6	=	Den. 30
Somme On. 20				Den. 90

La lega media sarà: Den. 4 $\frac{1}{2}$.

Poi dicasi: se den. 4 $\frac{1}{2}$ di lega portano on. 20, den. 2 quante ne porteranno? E come quì pure la proporzione è inversa, moltiplicando il primo col secondo termine, e dividendo pel terzo, avremo per quoto on. 45. Laonde alle on. 20 suddette dovransi aggiugnere on. 25 d'oro fino.

Articolo III.

Dato il Composto, trovare i Componenti.

QUì si procede come nell' Art. II. delle alligazioni delle merci. Eccone due esempi.

Quesito I. "Un orefice dee fare un vaso d'oro di on. 30 da 27 carati, ed ha tre qualità d'oro; A da 18, B da 21, C da 24. domandasi quanto ne debba prendere di ciascuna qualità"?

Si operi come nel suddetto Articolo delle Alligazioni delle Merci.

	Titoli	Differenze
Misto den. 22	*A* den. 18	2
	B . . 21	2
	C . . 24	4 × 1 = 5

Proporzioni . . .	D. 9:on. 30::D. 2:on. $6\frac{2}{3}$ *A*
	D. 9:on. 30::D. 2:on. $6\frac{2}{3}$ *B*
	D. 9:on. 30::D. 5:on $16\frac{2}{3}$ *C*

Somma delle once 30

Quesito II. " Si hanno on. 16 d'oro da 23. 12, e vuol ridursi a 22 carati, aggiungendone altro da 20. domandasi quanto di questo secondo si dovrà unirvi "?

Cerchinsi prima come sopra le differenze

	Titoli	Differenze
Misto. Den. 22	*A* Den. 23 12	2
	B Den. 20	1. 12

Somma delle Differen. Den. 3. 12

Poi si dica: Se la Differenza Den. 2 posta accanto di A porta on. 16; la differenza Den. 1, 12 posta accanto di B quante once porterà? e il quarto termine sarà once 12 esprimenti la quantità del secondo oro.

Ovvero dicasi: Se la Differenza A Den. 2 porta on. 16; la differenza totale Den. 3. 12 quante once porterà; e il quarto termine sarà on. 28, esprimenti il peso totale del misto, il quale per conseguenza dovrà esser composto di on. 16 del primo oro, e on. 12 del secondo.

Articolo IV.

Dato il peso, il titolo, e il valore di una moneta, trovar quello d' un' altra, e di qualunque pezzo d' oro, o d' argento.

Nei quesiti di questo genere non fa bisogno, che delle sole Regole di proporzione. Eccone alcuni esempi.

Quesito I. " Lo zecchino di Milano che vale lir. 15. 4, pesa den. 2 Gr. 20 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. Domandasi quanto debba valere un Marco della stessa bontà "?

Il Marco, come si è avvertito, equivale ad on. 8. S' istituisca adunque la proporzione diretta.

Den. 2. 20 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ | lir. 15. 4 | On. 8

Riducendo il 1, e 3. termine a ventiquattresimi di grano, avremo

1643 | lir. 15. 4 | 11592.

Prod. del 2. nel 3. term. lir. 1680998, 8

Quoto della div. pel 1. lir. 1023. 2. 6. $\frac{9}{1}\frac{6}{6}\frac{6}{+3}$

Quesito II. " Se on. 1 d' argento a titolo di den. 10, 18 vale l. 7. 10; quanto varrà un pezzo di argento di lib. 4 ossia d' on. 48 a titolo di den. 11. 18 "?

Quì istituiscasi la proporzione composta diretta:

Peso	Titolo	Valore	Peso	Titolo
On. 1	den. 10.18	lir. 7. 10	On. 48.	den. 18

Riducendo i due titoli a numeri interi col moltiplicarli per 4.

Onc. 1. Tit. 43 | lir. 7 10 | On. 48. Tit. 47

Riducendo il Quesito a tre termini

43 | lir. 7. 10 | 2256

Prod.

Prod. del 2. nel 3. term. lir. 16920
Quoto della div. pel 1. = lir. 393. 9. $9\frac{1}{4}\frac{1}{3}$.

QUESITO III. " Lo zecchino di Milano che vale lir. 15. 4, e pesa den. 2. 20 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ è alla bontà di den. 22 $\frac{1}{2}$. Domandasi a che bontà sarà il Sovrano che pesa den. 9 $1\frac{5}{6}$, e vale lir. 45 "?

Quì s'istituirà una proporzione composta mista, perchè il valore è in ragion diretta del titolo, e il peso è in ragione inversa. L'intavolazione adunque, e il trasporto dei termini sarà:

Valore	Peso	Titolo	Valore	peso
l. 15	4. den. 2. 20 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$	den. 23 $\frac{1}{2}$	l. 45.	den. 9. $1\frac{5}{6}$

Den. 9. $1\frac{5}{6}$: Den. 2, 20 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$

Riducendo alla stessa specie i due valori col moltiplicarli per 5, e i due pesi col moltiplicarli due volte per 24:

Valore	Peso	Titolo	Valore	Peso
76	5228	Den. $23\frac{1}{4}$	225	1643

Riducendo il Quesito a tre termini

397328 | Den. 23 $\frac{1}{2}$ | 369675

Prod. del 2. nel 3. term. Den. 8687362. 12
Quoto della div. pel 1 (moltiplicando tre volte i residui per 24, onde avere non solo i grani, e i ventiquattresimi di grano, ma anche i ventiquattresimi d' un ventiquattresimo di grano) Den. 21. 20. 17. 22 con un residuo da trascurarsi.

QUESITO IV. " Se lo zecchino di Milano col valore di l. 15. 4, e il titolo di den. 23 $\frac{1}{2}$ ha il peso di den. 2, 20. $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$, il Sovrano col valore di lir. 45, e il titolo di

den.

den. 13. 20. 17. 22 qual peso avrà "?

Anchè quì la proporzione sarà composta mista, perchè il valore è in ragion diretta del peso, e il titolo in ragione inversa. L'intavolazione e il trasporto de' termini sarà adunque:

Valore Titolo	Peso	Valore Titolo
l.15.4.D.23 $\frac{1}{2}$	D.2.20 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$	l.45.d.21.20.17.22
====		=======
D. 21. 20. 17. 22		Den. 25 $\frac{1}{2}$

Riducendo come sopra alla stessa specie i due valori col moltiplicarli per 5, e i due titoli col moltiplicarli tre volte per 24.

Valore Titolo	Peso	Valore titolo
74 302254	Den.2.20. $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$	225. 324864

Riducendo il Quesito a tre termini

22971 304 | Den. 2. 20 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ | 73094400

Prod. del 2. nel 3. term. Den. 208496700

Quoto della div. pel 1. (moltiplicando il primo residuo per 24 onde avere i grani, e il secondo per 6, onde avere i sesti di grano) Den. 9. 1. $\frac{5}{9}$ con un residuo da trascurarsi.

Quesito V. Se lo zecchino di Milano col peso di den. 2. 20 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$, il titolo di den. 23 $\frac{1}{2}$ ha il valore di lir. 15. 4, il sovrano col peso di den. 9. 1 $\frac{5}{6}$, e il titolo di den. 21. 20. 17. 22 qual valor debbe avere "?

Questo si scioglie con una Proporzione composta diretta, come il Quesito II. L' intavolazione è dunque

Peso Titolo	Valore	Peso Titolo
d.2.20 $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ d.23 $\frac{1}{2}$	l.15.4.	d.9 1 $\frac{5}{6}$ d.21.20.17.22

Riducendo alla stessa specie i due pesi col mol-

moltiplicarli due volte per 24, e i due titoli col moltiplicarli tre volte per 24.

Peso	Titolo	Valore	Peso	Titolo
1643	324864	lir. 15. 4	5228	302254

Riducendo il Quesito a tre termini

533751552 | lir. 15. 4 | 1590183912

Prod. del 2. nel 3. term. lir. 24018795462

Quoto della div. pel 1. lir. 44. 19. 11 con un residuo vicinissimo al valor d' un denaro; aggiunto il quale, il valor del Sovrano sarà appunto lir. 45.

Questi Quesiti poi, come è manifesto, servono scambievolmente l' uno all' altro di pruova.

SEZIONE VII.

Delle False Posizioni.

NEi Quesiti occorre talvolta, che per trovare il vero numero ricercato convenga supporne uno o due ad arbitrio, e prima operare sopra di questi.

Or siccome i supposti numeri comunemente si trovan falsi, così queste operazioni si chiaman *False Posizioni*.

La Falsa Posizione può esser semplice o doppia. Ella è *semplice*, quando il vero numero si ritrova per mezzo di un solo supposto. E *doppia*, quando per ritrovare il vero numero non basta un solo supposto, ma è necessario di farne due.

In quali casi basti la posizione semplice, e in quali si richiegga la doppia, noi il vedremo in progresso. CA-

CAPO I.

Della falsa posizione semplice.

NElla falsa posizione semplice, dato il quesito, si prende un numero ad arbitrio; e operando sopra il medesimo secondo le condizioni del Quesito, si osserva se questo le adempia tutte esattamente, nel qual caso sarà il vero numero ricercato; se no, cercasi con una Regola di Proporzione il vero numero, paragonando il risultato che si è avuto dal falso, con quello che dee venire dal vero. La cosa si farà chiara con un esempio.

QUESITO I. " Sian da dividersi 40 scudi fra tre persone, in maniera che la seconda n' abbia tre volte quanto la prima, e la seconda unitamente ".

Quì il numero da ritrovarsi è quel degli scudi che debbon toccare alla prima persona, saputi i quali, presto si saprà pure quanti ne debban toccare altre due.

Or suppongasi, che alla prima ne tocchin 5; moltiplicando questi per 3, la seconda ne avrà 15; sommando 3, e 15, la terza ne avrà 20. Uniscansi queste tre porzioni, e veggasi se tutte insieme formano 30 scudi. Quì formano realmente la detta somma, dal che risulta, che il supposto numero 5 è il vero che si cercava.

Ma come è troppo raro, che il vero numero incontrisi al primo tratto, così è da vedere, come si abbia a procedere, quando il supposto numero si trovi falso.

Po-

Poniamo adunque, che alla prima persona si dia 1 scudo solo. Giusta le condizioni del Quesito la seconda ne avrà 3, la terza ne avrà 4, e sommando queste 3 porzioni, risulteranno 8 scudi, che sono troppo minori di 40.

Ora affin di trovare il vero numero che dee toccare alla prima persona, s' istituisca questa Regola di Proporzione: Se scudi 8. risultano da scudi 1; scudi 40 da quanti risulteranno? e fatta l'operazione ne verrà il numero 5; il quale si conoscerà essere il vero numero ricercato, esaminando se adempia interamente tutte le proposte condizioni, come le adempie diffatti.

QUESITO II. " Del grano che uno aveva raccolto, ne ha impiegato $\frac{1}{3}$ per uso proprio, $\frac{1}{4}$ per seminare, $\frac{1}{6}$ ne ha venduto, e gli sono avanzate 50 Moggia; domandasi quanta sia stata la raccolta "?

AVVERTIMENTO. Ne' quesiti, in cui entran de' rotti, per evitare le frazioni, e facilitare il calcolo dee scegliersi il minor numero che sia esattamente divisibile per tutti i denominatori delle date frazioni, il quale si troverà colla regola dell' *accattare* insegnata a pag. 14, e frattanto servirà di scorta la seguente tavola:

Per 2, 3, 4, e 6 si prenda 12
Per 2, 3, 5, 6, 10, e 15 30
Per 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 ec.

Quì adunque suppongasi, che la raccolta sia stata 12. moggia. Levando da queste $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, rimarran 3. Ma secondo le

condizioni del Quesito ne debbono rimanere 50. Si dica adunque: se 3 rimangon da 12; 50 da che numero rimarranno? e questo numero si troverà essere 200, da cui levando $\frac{2}{3}$ ch'è 66 $\frac{2}{3}$, levando $\frac{1}{4}$ che è 50, e levando $\frac{1}{6}$ che è 33 $\frac{1}{3}$, rimarranno appunto 50.

Quesito III. "Uno interrogato quanto avesse speso in un viaggio, rispose che il terzo, il quarto, e il quinto della spesa totale formava 72 doppie: domandasi quale sia stata la spesa totale"?

Qui prendasi il numero 60, di cui le proposte parti sono 20, 15, e 12, le quali sommate insieme danno 47. Poi dicasi: se 47 vien da 60; 72 da che numero verrà? E questo numero esprimente la spesa totale sarà Doppie 91 $\frac{43}{47}$, di cui il terzo è 30 $\frac{33}{47}$, il quarto è 22 $\frac{46}{47}$, il quinto è 18 $\frac{18}{47}$ che sommati insieme danno appunto 72.

Quesito IV. "Un giuocatore dopo aver perduto il terzo, e il quarto degli zecchini che aveva, guadagnando una somma eguale al numero di quelli che gli restavano, moltiplicato in se stesso (ossia eguale al quadrato di questo numero), si è trovato rimesso in capitale. Domandasi quanti zecchini avesse a principio"?

Si supponga che ne avesse 12. Levando il terzo ch'è 4, e il quarto ch'è 3, resteran 5, che moltiplicati in se stessi dan 25. Ma secondo le condizioni del Quesito gli Zecchini rimasti al Giuocatore, moltiplicati in se stessi dovrebbero nuovamente

dar

dar 12. Si dica adunque: come il 25 sta al supposto numero 12, così questo sta al vero numero che si ricerca; e moltiplicando il 12 per se stesso, poi dividendolo per 25, il quoto $5\frac{19}{25}$ esprimerà il vero numero degli zecchini che il giuocatore aveva a principio. Diffatti levandone il terzo che è $1\frac{23}{25}$, ed il quarto che è $1\frac{11}{25}$, i quali insieme sommati fan $3\frac{9}{25}$, resteranno $2\frac{19}{25}$, che moltiplicati per se stessi, e ridotti ai minimi termini danno $\frac{144}{24}$, ossia restituiscono gli zecchini $5\frac{19}{25}$, che il giuocatore aveva dapprima.

Quesito V. "Uno interrogato intorno all'età sua rispose, che se campasse ancora la metà, il terzo, e il quarto degli anni che aveva attualmente, sarebbe arrivato a 100 anni. Che età adunque aveva egli allora"?

Prendasi il 12, di cui la metà 6, il terzo 4, e il quarto 3 fanno 13, e sommati cogli anni 12 che si suppone avere attualmente, fan 25; poi dicasi: se 25 vengon da 12; 100 da che numero verranno? Questo sarà 48, di cui la metà è 24, il terzo è 16, il quarto è 12, che sommati cogli anni 48 fan 100 appunto.

Quesito VI. "Un altro interrogato dell'età sua rispose: Io ho tanti anni, che se ad ogni 24 se ne aggiugnessero due di più, arriverebbero a 68; domandasi quanti anni egli avesse"?

Suppongasi che ne avesse 60. Come questo contiene il 24 due volte e mezzo, così gli si dovrebbero aggiugnere anni 5, che

in tutto però farebbero solamente 65. Or dicasi: se 65 vengono da 60; 68 da quanti verranno? e il quarto termine sarà 62 $\frac{60}{65}$ o $\frac{10}{13}$.

AVVERTIMENTO. Il presente Quesito può sciogliersi anche senza la Falsa Posizione, ragionando nel seguente modo.

Il numero 68 quì comprende non solo la vera età ricercata, ma anche i due anni che suppongonsi aggiunti ad ogni 24. Si dica adunque: se anni 26, levandone i due aggiunti, tornano a 24; anni 68 levandone gli aggiunti nella stessa proporzione a quanti ne torneranno? E il quarto termine sarà anni 62 $\frac{20}{26}$, o $\frac{10}{13}$.

Pruova. Per An. 60, che contengono il 24 due volte e mezzo gli si debbono aggiungere anni 5; per gli altri anni 2 $\frac{12}{13}$ gli si debbon aggiungere $\frac{3}{13}$ d'un anno, poichè 24 sta a 2, come 2 $\frac{10}{13}$ a $\frac{3}{13}$. Sommando adunque anni 62 $\frac{10}{13}$, più anni 5, più $\frac{3}{13}$ d'un anno, risultano appunto an. 68.

QUESITO VII. "Uno ha guadagnato in 4 giorni lir. 500 con quest'ordine; il 2. giorno ne ha guadagnato la metà del 1.; il 3. giorno ha guadagnato il triplo del 2.; il 4. giorno ha guadagnato due volte e $\frac{1}{4}$ più che nel primo: domandasi il guadagno di ciascun giorno.

Quì basta trovare il guadagno d'un giorno per saper quello degli altri. Suppongasi adunque che nel 1. giorno egli abbia guadagnato lir. 4; nel 2. saran lir. 2, nel 3. lir. 6, nel 4. lir. 9, che sommate insieme fan-

fanno lir. 21. Or dicasi: se lir. 21 vengono da lir. 4; lir. 500 da quante verranno? Queste saranno 95 $\frac{5}{21}$ esprimenti il guadagno del 1. giorno; la metà 47 $\frac{13}{22}$ darà il guadagno del 2; questo moltiplicato per 3 darà 142 $\frac{18}{25}$ per guadagno del 3; finalmente raddoppiando quello del 1. giorno, che farà 190 $\frac{10}{21}$, e aggiugnendovi il quarto dello stesso guadagno del giorno 1, che è 23 $\frac{17}{21}$, si avranno 214 $\frac{6}{21}$ per guadagno del 4 giorno, e sommando tutti questi guadagni risulteranno le lir. 500 proposte.

QUESITO VIII. "Un mercatante va ad una fiera con un certo capitale, e vi guadagna il 10 per 100; colla somma del capitale, e del guadagno va ad una seconda, e vi guadagna il 20 per 100; colla somma parimente del nuovo capitale, e del guadagno passa ad una terza, e vi guadagna il 25 per 100. Il guadagno totale oltre al capital primo si trova di lir. 3000. Domandasi qual fosse questo primo capitale".

Supposto che fosse lir. 100, nella prima fiera sarebbe diventato lir. 110, nella seconda lir. 132, nella terza lir. 165, e il guadagno totale sarebbe stato lir. 65.

Si dica adunque: se lir. 65 vengono da lir. 100; lir. 3900 da qual capitale verranno? e questo risulterà a lir. 6000.

Pruova. Con lir. 6000 alla prima fiera avrà fatto lir. 6600, alla seconda lir. 7920, alla terza lir. 9900, da cui levando il capitale lir. 6000, resteran di guadagno lir. 3900.

Quesito IX. " Braccia 45 di una stoffa, e Braccia 28 di un' altra costano in tutto lir. 764 ; ma la seconda costa al braccio $\frac{1}{3}$ meno della prima . Domandasi il prezzo dell' una , e dell' altra ".

Supposto che la prima costi l. 3 al braccio , la seconda costerà lir. 2. Il prezzo adunque delle Braccia 45 sarà lir. 135 , e quello delle Braccia 28 sarà lir. 56 , che prese insieme fan lir. 191.

Si dica adunque : Se lir. 191 vengono dal prezzo della prima stoffa supposto lir. 3 ; lir. 764 da qual prezzo verranno ? e il quarto termine sarà lir. 12 ; e per conseguenza il prezzo della seconda stoffa sarà lire 8.

AVVERTIMENTO. Anche il presente quesito si può risolvere senza la falsa posizione , ragionando nel modo seguente ; se le B. 78 costano $\frac{1}{3}$ meno , dunque col denaro che si è speso per comperarle , se avessero dovuto pagarsi al prezzo delle altre , se ne sarebbe avuto un terzo meno , cioè solamente braccia 18 $\frac{2}{3}$. Queste unite alle altre 45 sarebbero braccia 63 $\frac{2}{3}$, il costo delle quali sarebbe come sopra lir. 764. Or dividendo lir. 764 per braccia 63 $\frac{2}{3}$, ossia moltiplicando prima per 3 l' uno e l' altro numero , e dividendo i risultati 2292 , per 191 , si avranno per quoto l. 12 come sopra per prezzo della prima stoffa , e perciò lir. 8 per la seconda.

Pruova. Si moltiplichin Braccia 45 per lir. 12 , e avremo lir. 540. Si moltiplichin pa-

parimente Braccia 28 per lir. 8, e avremo lir. 224. In tutto lir. 764.

Quesito X. Si è impiegato un capitale a lir. 4. 10 per 100 all' anno, e dopo an. $4\frac{1}{2}$ si son ricevute fra capitale e interessi lir. 12626. 5. Domandasi qual fosse il capitale "?

Suppongasi che fosse lir. 100. In anni $4\frac{1}{2}$ sarebbero risultate fra capitale, e interessi lir. 120. 5.

Si dica adunque: Se lir. 120. 5 vengon da lir. 100; lir. 12626. 5 da qual capitale verranno? e questo si troverà lir. 10500.

Pruova. Cerchinsi gl' interessi di lire 10500 a lir. 4. 10. per 100 in anni $4\frac{1}{2}$, e saranno lir. 2126. 5, che aggiunte al capitale daranno lir. 12626. 5.

Quesito XI. " Un serbatojo d' acqua, ha 2 aperture, per l'una delle quali, allorchè è pieno, si vuota in gior. $12\frac{1}{2}$. Domandasi in quanti giorni, essendo pieno, si voterà, ricevendo e mandando allo stesso tempo "?

Suppongasi che ciò debba avvenire in giorni 10, e si vegga prima quant' acqua perderebbe in 10 giorni lasciando aperta la sola bocca inferiore, allorchè è pieno; e quant' acqua riceverebbe al contrario in 10 giorno, lasciando aperta la sola bocca superiore, allorchè è vuoto.

Per far questo convien prima determinare la capacità del serbatojo, la quale però può supporsi a piacere o maggiore o minore sussistendo sempre la medesima proporzione.

Quì per maggior comodo si stabilisca di 100 brente, e si dica: se in gior. 12 $\frac{1}{2}$, essendo pieno, perde br. 100; in gior. 10 quante ne perderà? e faranno br. 80.

Poi dicasi viceversa: se in gior. 18, essendo vuoto, riceve br. 100; in gior. 10 quante ne riceverà; e saranno br. 55 $\frac{5}{9}$.

Sottraggansi le br. 55 $\frac{5}{9}$ dalle br. 80, e resteranno br. 24 $\frac{4}{9}$ di perdita.

E' chiaro adunque che essendo pieno, e ricevendo e mandando allo stesso tempo, in gior. 10 verrà a perdere br. 24 $\frac{4}{9}$.

Ciò posto si dica, se br. 24 $\frac{4}{9}$ si perdono in gior. 10; br. 100 in quanto tempo si perderanno? e il quarto termine sarà gior. 40 $\frac{10}{11}$.

Pruova. Si vegga quanto riceva in questo tempo, dicendo; se in gior. 18 riceve br. 100; quante ne riceverà in gior. 40 $\frac{10}{11}$.

Si vegga parimente quanto perda in questo tempo, dicendo: se in giorni 12 $\frac{1}{2}$, perde Br. 100; quante ne perderà in Gior. 40 $\frac{10}{11}$? e saranno Br. 327 $\frac{3}{11}$, da cui sottraendo ciò che riceve, resteranno di perdita Br. 100, quanto è appunto la capacità del serbatojo, vale a dire, questo rimarrà vuoto.

Se invece per la bocca superiore si empisse in Gior. 12 $\frac{1}{2}$, e per l' inferiore si votasse in Gior. 18, si troverebbe collo stesso metodo, che essendo voto il serbatojo, e lasciando aperte amendue le bocche, si empirà in Gior. 40 $\frac{10}{11}$.

Que-

Quesito XII. "Uno guadagna lir. 20 ogni giorno che lavora, e perde lir. 12 ogni giorno che non lavora. Dopo 40 giorni si trova la perdita eguale al guadagno. Domandasi quanti giorni abbia lavorato, e quanti no?

Se avesse lavorato Gior. 12, e tralasciato Gior. 20, il guadagno, e la perdita sarebbero stati egualmente lir. 240. Ma la somma de' Giorni allor sarebbe solamente 32.

Or dovendo questa esser gior. 40, si dica: Se per aver eguale il guadagno, e la perdita in gior. 32 dee lasciar di lavorare per gior. 20; in gior. 40 quanti dovrà lasciarne? e il quarto termine sarà gior. 25.

Avrà egli adunque lavorato per gior. 15, e tralasciato per gior. 25.

Prudva. Si moltipli. hin gior. 15 per lir. 20, e gior. 25 per lir. 12, e risulteranno dall' una, e dall' altra parte lir. 2000; vale a dire il guadagno, e la perdita saranno eguali.

Quesito XIII. "Un Artefice A non può da solo compire una data opera che in 40 giorni; ma con un compagno B la termina in gior. 16. Or trattasi di aggiugnervi un altro compagno C, il quale da solo non fa che in giorni 15 quello, che B fa in giorni 12, e domandasi 1. in quanto tempo finiran l' opera i tre compagni A, B, C tutti insieme; 2. in quanto tempo la finirà B da se solo; 3. in quanto tempo C da se solo; 4. in quanto tempo A, e C insieme: 5. in quanto tempo B, e C insieme"?

Suppongasi che tutti insieme terminin l' opera in giorni 10, e veggasi 1. quanta parte in questo tempo ne farà A, dicendo; se in gior. 40 fa opera 1; in gior. 10 quanto ne farà? e saran $\frac{10}{40}$, ossia $\frac{1}{4}$.

2. Veggasi quanto ne faranno A, e B insieme, dicendo: se in gior. 16 fan op. 1, quanto in gior. 10? e saran $\frac{10}{16}$, ossia $\frac{5}{8}$.

3. Si vegga quanto ne farà B; e sottraendo la parte di A, che è $\frac{1}{4}$, ossia $\frac{2}{8}$, resteranno per B $\frac{3}{8}$.

4. In quanto tempo B farà tutta l'opera da se solo, dicendo: se $\frac{3}{8}$ da lui si fanno in gior. 10, l'opera 1 in quanti giorni si farà? e questi saranno gior. 26 $\frac{2}{3}$.

5. Quanta parte ne farà B in gior. 12, dicendo; se in gior. 26 $\frac{2}{3}$ fa op. 1; in gior. 12 quanto ne farà? e saranno $\frac{36}{80}$, ossia $\frac{9}{20}$.

6. In quanto tempo C farà l'opera da se solo; e siccome i $\frac{9}{20}$, che B fa in gior. 22, C non può farli che in gior. 12, così si dica; se C fa $\frac{9}{20}$ in giorni 15; in quanti giorni farà op. 1? e questi saranno gior. 33 $\frac{9}{9}$, ossia 33 $\frac{1}{3}$.

7. Quanta parte ne farà C in gior. 10, dicendo: se in gior. 33 $\frac{1}{3}$ fa op. 1; in gior. 10 quanto ne farà? e saran $\frac{100}{400}$, ossia $\frac{3}{12}$.

8. Si sommino le parti dell'opera, che ciascuno fa da se solo in gior. 10, trovate ai num. 1, 3 e 7 le quali sono A $\frac{1}{4}$, B $\frac{3}{8}$, e C $\frac{3}{12}$, e sommate insieme fanno $\frac{17}{24}$.

9. Si

9. Si cerchi in quanto tempo finiran l'opera tutti insieme, dicendo: se $\frac{37}{45}$ da lor si fanno in gior. 10; l'op. 1 in quanti si farà? e saranno gior. 10 $\frac{30}{37}$.

10. Si cerchi in quanto tempo la finiranno insieme A e C, sommando prima le parti che ne fa ciascuno in giorn. 10, cioè A $\frac{1}{4}$, C $\frac{3}{10}$ che prese insieme danno $\frac{22}{40}$, ossia $\frac{11}{20}$, e poi dicendo: se $\frac{11}{20}$ si fanno gior. 10: l'op. 1. in quanti si farà? e saranno gior. 18 $\frac{2}{11}$.

11. Si cerchi finalmente in quanto tempo la finiranno insieme B e C, sommando anche quì le parti che ne fa ciascuno in gior. 10, cioè B $\frac{3}{8}$, e C $\frac{3}{10}$ che insieme danno $\frac{54}{80}$, ossia $\frac{27}{40}$, e poi dicendo: se $\frac{27}{40}$ da lor si fanno in gior. 10; l'op. 1 in quanti si farà? e saranno gior. 14 $\frac{2}{27}$.

Riassumendo adunque il tutto avremo i seguenti risultati:

A da solo, secondo i dati fa l'opera in gi. 40
B da solo pel num. 4. . . . in gior. 26 $\frac{2}{3}$
C da solo pel num. 6. . . . in gior. 33 $\frac{1}{3}$
A, B, C tutti insieme pel n. 9. . in gior. 10 $\frac{30}{37}$
A e B secondo i dati . . . in gior. 16
A e C pel num. 10 . . . . in gior. 18 $\frac{2}{11}$
B e C pel num. 11. . . . . in gior. 14 $\frac{2}{27}$

Pruova: Per far questa basterà osservare quanta parte dell' opera fa ciascuno nei gior. 10 $\frac{30}{37}$, e vedere se queste parti insieme unite dan l'opera intera: si dica dunque:

1. Se *A* in gior. 40 fa op. 1; in gior. 1 $\frac{30}{37}$ quanto ne farà, e saranno $\frac{450}{1480}$, ossia $\frac{15}{37}$.

2. Se *B* in gior. $26\frac{2}{3}$ fa op. 1 ; in gior. 10 $\frac{30}{37}$ quante ne farà ? e saranno $\frac{1250}{1766}$, ossia $\frac{125}{176}$

Sommando le tre frazioni $\frac{10}{37}$ più $\frac{35}{176}$ più $\frac{12}{37}$, avremo appunto $\frac{37}{37}$, cioè Op. 1.

Quesito XIV. " Si ha premura di vestire 3000 soldati . Un sartore *A* si offre co' suoi lavoranti a compir l'opera in mesi 2 $\frac{1}{2}$, un altro *B* in mesi 4 $\frac{1}{2}$, un altro *C* in mesi 5 giorni 10. Per sollecitar l'opera maggiormente , si ordina , che tutti lavorino . Domandasi in quanto tempo compiran l' opera tutti insieme ?

Quì si consideri l' opera istessa invece di considerare il numero de' soldati : e si vegga quanta parte se farà ciascuno in un mese .

Se adunque *A* fa l'opera intera in mesi 2 $\frac{1}{2}$, in mezzo mese ne sarà $\frac{1}{5}$, e in 1 mese ne farà $\frac{2}{5}$. Allo stesso modo si troverà che *B* in 1 mese ne farà $\frac{2}{9}$, e *C* $\frac{5}{156}$.

Si riducano le tre frazioni $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{9}$, e $\frac{25}{156}$ allo stesso denominatore , e si sommino ; ne verranno $\frac{578}{1170}$ esprimenti le parti dell' opera , che tutti insieme faranno in un mese .

Ciò posto si dica : se $\frac{578}{1170}$ dell' opera si fanno in mese 1 , tutta l' opera 1 in quanto tempo si farà ? e s'intavoli nel modo seguente :

Op. $\frac{578}{1170}$ | Mes. 1 | Op. 1

Mol-

Moltiplicando il 1,e 3.term. per 720, avremo:

583 | Mes. 1 l. 720

Fatta la divisione avrem per quoto mese 1 giorni 7 $\frac{20}{583}$ esprimente il tempo, in cui l' opera da tutti insieme sarà terminata.

Prova. Si dica: Se *A* in mesi 2 $\frac{1}{2}$ fa tutta l' opera 1, in mese 1. 7. $\frac{20}{583}$ quanta parte ne farà? e risulteranno $\frac{2480}{583}$. Allo stesso modo risulteranno per *B* $\frac{1680}{583}$, e per *C* $\frac{1560}{583}$, in tutto $\frac{5920}{583}$; ossia tutta l' opera 1.

Questo Quesito può applicarsi a qualunque opera che debba farsi da molti insieme, ciascun de' quali sia atto a terminarla da solo entro a diverso tempo.

AVVERTIMENTO. Il presente Quesito si è sciolto senza veruna Falsa Posizione, come abbiamo mostrato, che senza di essa poteano sciogliersi i Quesiti VI. e IX. In genere quando un Quesito che di sua natura apparterrebbe alla Falsa Posizione, si può con qualche artificio risolvere senza della medesima, il partito deve abbracciarsi, perchè l' operazione oltre al riuscire più breve, riesce anche più chiara, e soddisfacente. Varj infatti così ne abbiamo già sciolti nei Conti Mercantili, in quei di società ec. e quì ne daremo altri esempi.

QUESITO XV. *Sopra libbre* 800 *di una merce qualunque si ebbe il guadagno di lir.* 3168; *e questo risultò a ragione di lir.* 18 *per* 100; *domandasi* 1. *quanto costasse ogni libbra*, 2. *a quanto ogni libbra si sia venduta?*

I.Par-

I. Parte. Si dica in primo luogo: se lir. 18 sono state guadagnate da lir. 100; lir. 3168 da quante debbono essere guadagnate? Il quarto termine sarà lir. 17600 indicante il costo totale delle libbre 800. Si dividano adunque le lir. 17600 per libbre 800, e risulterà il costo di ogni libbra a lir. 22.

II. Parte. Si sommi il costo lir. 17600, e il guadagno lir. 3168; la somma lire 20768 esprimerà il totale prodotto della vendita, il quale diviso per libbre 800 darà il prodotto di ogni libbra, che sarà lir. 25. 19 $\frac{1}{5}$.

Pruova d'amendue le Parti. Qui basta dire: se lir. 100 han guadagnato lir. 18; lir. 22 quanto debbono aver guadagnato? e il quarto termine sarà lir. 3. 10 $\frac{1}{5}$, che aggiunte al costo lir. 22 daran come sopra il prodotto della vendita in lir. 25. 19 $\frac{1}{5}$ per libbra.

QUESITO XVI. " Uno compera del panno, e dice che se lo avesse pagato lir. 2. 10 di meno al braccio, e il vendesse a l. 21. 4 guadagnerebbe il 6 per 100; domandasi quanto gli sia costato?

Si dica: se lir. 106 debbon venire da l. 100; lir. 21. 4 da quante debbon venire? Il quarto termine sarà lir. 20, esprimente ciò che il panno doveva costare per guadagnarvi il 6 per 100; e aggiugnendovi le lir. 2. 10 che è costato di più, s' avrà il vero costo in lir. 22. 10.

Pruova. Si dica: se lir. 100 guadagnano lir.

lir. 6 ; lir. 20 quanto debbono guadagnare? Il quarto termine sarà lir. 1. 4 , che aggiunto a lir. 20 dà lir. 21. 4 , prezzo a cui il panno si dee vendere per guadagnarvi il 6 per 100.

Quesito XVII. " Uno compra del Vino, e dice che se lo avesse pagato lire 5 di più alla brenta, e il vendesse l. 22, guadagnerebbe il 10 per 100 ; domandasi quanto lo abbia pagato "?

Si dica : se l. 110 debbon venire da l. 100 ; l. 22 da quante debbon venire ? Il quarto termine sarà l. 20, da cui levando l. 5 il vero costo sarà l. 15.

Pruova. Se l. 100 guadagnano l. 10 ; l. 20 quanto debbono guadagnare? Il quarto termine sarà l. 2, che aggiunte alle l. 20 danno il prezzo della vendita in l. 22.

Quesito XVIII. " Uno compra del Frumento, e dice, che se l'avesse pagato l. 4. di più, e il vendesse l. 22 , perderebbe l. 8 $\frac{1}{3}$ per 100 ; domandasi quanto lo abbia pagato "?

Perdendo lire 8 $\frac{1}{3}$ per 100 , lire 100 riduconsi a lire 91 $\frac{2}{3}$. Si dica adunque: se lire 91 $\frac{2}{3}$ vengono da lire 100; lire 22 da quante debbon venire? Il quarto termine sarà lire 24, da cui levando lire 4, il vero costo sarà l. 20.

Pruova. Se lire 24 riduconsi a lire 22 ; lire 100 a quante si ridurranno? Il quarto termine sarà come sopra lire 91 $\frac{2}{3}$.

Quesito XIX. " Uno ha moggia 60 di frumento , che in tutto costano l. 2271 ,

12, 6; ma tra queste sa che moggia 11 sono costate per ciascuno l. 2, 2, 6 meno dell'altre 49; domandasi qual sia stato il prezzo di ciascuna qualità"?

Moggia 12 moltiplicate per lire 2, 2, 6 danno lire 23, 7, 6. Queste aggiunte a lire 2271, 12, 6 fanno lire 2295 esprimenti quanto sarebber costate le moggia 60, se il prezzo fosse stato eguale in tutte. Dividendo adunque lire 2295 per 60, il quoto lire 38, 5 indicherà qual sarebbe stato in tal caso il prezzo di ciascun moggio; e sottraendone lire 2, 2, 6 resteranno per prezzo delle 11 moggia lire 36, 2, 6.

Pruova. Mogg. 49 a l. 38,5 fanno lir. 1874, 5,
Mogg. 11 a l. 36.2,6 - lir. 397,7,6

Somma . . lir. 2271,12,6

QUESITO XX. "Uno ha venduto egual numero di moggia di Grano, e di brente di Vino; il Grano costava l. 20, e fu venduto a l. 23, il Vino costava l. 19, e fu venduto a l. 22: il guadagno in tutto è stato di l. 108. Domandasi quante fosser le moggia e le brente"?

Si sommi il costo d'un moggio, e d'una brenta che dà l. 39, sommisi parimente il loro ricavato, che dà l. 45. Il guadagno sopra d'un moggio, e d'una brenta sarà l. 6.

Ciò posto si dica: se lire 1 vengon da 1 (moggio, e brenta), lire 108 da quante (moggia, e brente) verranno? Il quarto termine sarà 18 indicante, che tante erano così le moggia, come le brente.

Più

Più in breve: dividasi il guadagno totale lire 108 pel guadagno di un moggio, e di una brenta che è lire 6; il quoto 18 darà il numero delle moggia, e delle brente.

Pruova. Moggia 18 moltiplicate pel loro costo lire 20 fan lire 360: le stesse moltiplicate pel ricavato l. 23 fan l. 414. Sottratto un prodotto dall' altro restan di guadagno lire 54. Lo stesso guadagno si troverà sopra alle 18 brente; e i due guadagni sommati insieme formano appunto l. 108.

Quesito XXI. " Uno ha comperata una certa quantità di tela pagandola l. 8, 1, 6 ogni braccia 4 $\frac{3}{4}$; e l' ha venduta allo stesso prezzo ogni braccia 4 $\frac{3}{4}$ guadagnandovi in tutto l. 32, 6. Domandasi quanta fosse la Tela ,, ?

Si dica in 1. luogo: se braccia 4$\frac{3}{4}$ valevano lire 8, 1, 6: braccia 4 $\frac{1}{4}$ quanto dovean valere? e il quarto termine sarà lire 7, 4, 6: onde col venderla lire 8, 1, 6 egli v' ha guadagnato soldi 17.

In secondo luogo si dica: se soldi 17 guadagnansi sopra a braccia 4 $\frac{1}{4}$; lir. 32 6 su quante braccia si guadagneranno? e il quarto termine sarà B. 161 $\frac{1}{2}$.

Pruova: se braccia 4 $\frac{3}{4}$ costavano lire 8, 1, 6, braccio 1 costava lire 1, 14. Parimente se br. 4 $\frac{3}{4}$ si son vendute a lire 8, 1, 6: br. 1 si è venduto a lire 1, 18. Si sono dunque guadagnati soldi 4 su d' ogni braccio: e moltiplicando questi per br. 161 $\frac{1}{2}$, risulterà appunto il guadagno totale l. 32, 6.

CAPO II.

Della falsa posizione doppia.

E' Necessario il ricorrere alla doppia falsa posizione, allorchè il vero numero ricercato con una sola non può trovarsi.

Or ciò succede in due casi principalmente; 1. quando nel quesito vi sian dei numeri determinati e costanti, quali debbansi calcolare insieme co' numeri presi ad arbitrio: non potendosi più allora per la ragione, che si vedrà in appresso, dal risultato del supposto numero cavare immediatamente colla regola di proporzione il vero numero ricercato: 2. quando nella prima posizione si hanno dal supposto numero due risultati diversi, e per conseguenza non si può far uso nè dell' un nè dell' altro per trovare il vero numero che si cerca.

Ben è vero che in ambedue i casi si può sovente con varj artificj ridurre il Quesito dalla doppia falsa posizione alla semplice, o sciogliersi ancora senza le false posizioni; e alcuni di questi artificj noi verremo indicando a suo luogo; ma sovente altresì la doppia falsa posizione è indispensabile.

Allora adunque 1. sopra d'un numero preso ad arbitrio si comincia ad operare secondo le condizioni del Quesito, come nella posizione semplice.

2. Se l'ultimo risultato di questa prima operazione, o di questo primo *modello*, come suole chiamarsi, è maggiore o minore di quello che doveva aversi, o di quello che si è

si è avuto innanzi, si sottrae l' uno dall' altro, e la differenza, ossia l' errore si segna col *più* quando il detto risultato è maggiore, e col *meno* quando è minore.

3. Sopra d' un altro numero preso ad arbitrio si fa una seconda operazione, o un secondo modello, e in questo pure se l' ultimo risultato è maggiore, si segna l' errore col *più*, e se è minore col *meno*.

4. Allorchè i due errori hanno i medesimi segni cioè *più* e *più*, o *meno* e *meno*, si comincia a sottrarre l' uno dall' altro, ed il residuo dà il divisore dell' operazione da farsi in seguito; poi si moltiplica il primo supposto pel secondo errore, e sottraendo un prodotto dall' altro se n' ha il dividendo.

5. All' opposto se i due errori hanno i segni contrarj, cioè *più* e *meno*, o *meno* e *più*, questi si sommano, e la lor somma dà il divisore: poi si moltiplica come sopra il primo supposto pel secondo errore, e viceversa, e i loro prodotti sommati insieme danno il dividendo.

6. Si fa la divisione, e il quoto dà il numero ricercato.

AVVERTIMENTO. La ragione di tutte queste operazioni coll' Algebra si dimostra facilmente (veggansi fra gli altri gli *Elementi di Matematica del R. Prof.* D. Carlo Francesco Gianella. *Pavia* 1781 *in quarto pag.* 127.); ma colla semplice Aritmetica sarebbe troppo lunga e difficile a dichiararsi. Invece proporremo varj esempi che faranno vedere in pratica l' uso e l' esattezza delle suddette operazioni. Que-

Quesito I. " Un Viaggiatore interrogato quante miglia avesse fatte, rispose: s' io n' avessi fatte altrettante, e $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ di più, e a queste se n'aggiugnessero altre 15, le miglia sarebbero 250. Domandasi quante fossero realmente " ?

I. Posizione. Suppongasi che fosser 12: aggiugnendone altre 12, poi la metà che è 6, i due terzi che sono 8, i tre quarti che sono 9, e il numero costante 15, la somma delle miglia sarebbe in tutto 62, che è troppo minore delle proposte 250. Si faccia adunque la sottrazione, e la differenza 188 si segni col *meno*.

II. Posizione. Suppongasi invece che le miglia fossero 24: aggiugnendone altre 24; poi la metà che è 12, i due terzi che sono 16, i tre quarti che son 18, e il numero costante 45, la somma sarebbe 109, che parimente è minore di 250. Facciasi qui pure adunque la sottrazione, e la differenza 141 si segni parimente col meno.

Avendo le due differenze gli stessi segni, sottraggasi l' una dall' altra, e il residuo 47 darà il divisore.

Si moltiplichi il primo supposto 12 per la seconda differenza 141, e s' avrà il prodotto 1692: si moltiplichi parimente il secondo supposto 24 per la prima differenza 188, e s'avrà il prodotto 4512: per l' eguaglianza de' segni si sottragga un prodotto dall' altro; e il residuo 2820 darà il dividendo.

Facciasi la divisione, e il quoto 60 sarà il ver numero ricercato.

In-

Infatti a 50 miglia aggiungnendone altre 60, poi la metà 30, i due terzi 40, i tre quarti 45, e il numero costante 15, la somma sarà appunto 250.

Quesito II.° Tre compagni hanno fra tutti insieme 190 zecchini; ma il secondo *B* ne ha 4 più del primo *A*, e il terzo *C* ne ha quanto *A*, e *B* più 8. Domandasi quanti zecchini abbia ciascuno "?

Quì basta trovare quelli di *A* per saper tutti gli altri. Or dunque:

I Posizione. *A* n'abbia 1; *B* n'avrà 5; *C* n'avrà 14; tutti insieme n'avranno 20 la cui differenza da 100 è *meno* 80.

II. Posizione. *A* n'abbia 30; *B* n'avrà 34: *C* n'avrà 72; tutti iasieme n'avranno 136, la cui differenza da 100 è *più* 36.

Essendo quì i segni contrarj, si sommino le differenze, e la somma 116 sarà il divisore.

I prodotti di 1 per 36, e di 30 per 80 saranno 36 e 2400, che parimente sommati a motivo de' segni contrarj daranno 2436 per dividendo.

Fatta la divisione, il quoto 21 darà il numero ricercato esprimente gli zecchini di *A*, posti i quali, *B* n'avrà 25, *C* n'avrà 54, e tutti insieme n'avranno 100.

AVVERTIMENTO. La ragione, per cui quando nel Quesito vi son dei numeri dati, che debbansi calcolare coi numeri presi ad arbitrio, non basta una sola falsa posizione, si è, che i numeri dati essendo invariabili, impediscono che i termini, ov'essi en-

entrano, possano calare o crescere in giusta proporzione cogli altri che ne vanno esenti. Perciò nel primo quesito a cagion d'esempio dopo aver trovato colla prima posizione il risultato 62, non si può dire come nella falsa posizione semplice: se miglia 62 risultan 12: miglia 250 da quante risulteranno? poichè le miglia 62 non risultano solamente dal supposto numero 12 preso due volte, e da $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ del medesimo, ma anche dal numero invariabile 15 aggiunto al restante: e le miglia 250 parimente debbono risultare non solo dal vero numero preso due volte, e da $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ del medesimo; ma anche dal suddetto numero 15. Ora le parti del numero vero potranno ben crescere o diminuire a proporzione di quelle del numero supposto: ma il numero invariabile 15 rimarrà sempre lo stesso dall'una e dall'altra banda, e per conseguenza le miglia 250 non potranno aver col numero vero la stessa proporzione, che le miglia 62 han col supposto 12. Infatti dalla suddetta proporzione 62 : 12 :: 250 : 1, invece del numero vero 60, viene per quarto termine il numero 48 $\frac{24}{62}$, che manifestamente è falso.

Da ciò però si ricava una facil maniera di ridurre questi Quesiti alla falsa posizione semplice, togliendo dall'una e dall'altra parte i numeri invariabili. Infatti

Nel I. Quesito togliendo il 15 dal 62 resteranno 47, togliendo lo stesso 15 da 250 resteranno 235, e fatta allor la pro-

por-

porzione 47 : 12 : : 235 : x, il quarto termine sarà il vero numero 60.

Nel II. Quesito parimente togliendo dal 20, risultato della prima posizione, il numero 4 aggiunto alla porzione di B, e il numero 4 più 8, ossia 12 aggiunto alla porzione di C, resteran 4; togliendo gli stessi numeri che presi insieme fan 16 dalla data somma 100 zecchini, resteranno 84, e fatta la proporzione 4 : 1 : : 84 : x, si avrà per quarto termine il vero numero 21.

In pratica. Nel I. Quesito si toglie a dirittura dalla data somma 250 miglia il numero 15, per cui restano 235, e si tralascia di calcolare il 15 nella falsa posizione. Nel II. Quesito parimente si tolgono a dirittura dalla data somma 100 zecchini i numeri 4, più 4, più 8, che insieme fan 16, e si tralascia similmente di calcolar questi numeri nella falsa posizione.

Quesito III. Un Limosiniere volendo a un dato numero di Poveri distribuire una data somma, trova che dando a ciascuno soldi 2, 6 gli crescono l. 5, e dando a ciascuno soldi 3 gli mancano l. 4. Domandasi qual fosse la somma, e quale il numero dei Poveri"?

Quì è chiaro che trovata l'una delle due cose, sarà trovata anche l'altra. Cerchisi adunque il numero de' Poveri.

I. Posizione. Suppongasi che i poveri sian 100. Dando a ciascuno ss. 2, 6 s' impiegherebbero l. 12, 10, o dovendo avanzar l. 5, la somma sarebbe l. 17, 10. All'

incontro dando a ciascuno ss. 3 , s' impiegherebbero l. 15, e dovendo mancar l. 4 , la somma sarebbe soltanto l. 11 , quando secondo il primo risultato doveva esser l. 17, 10. Si han quì dunque dalla 1. falsa posizione due risultati diversi , e non potendo nè dall' un , nè dall' altro cavar il numero vero, è necessaria una 2. falsa posizione. Si cominci frattanto a sottrarre il secondo risultato dal primo , e la differenza o l' errore l. 6, 10 si segni in *meno*.

II. Posizione. Si supponga che i poveri sieno 200. Dando a ciascuno sol. 2, 6 s' impiegherebbero l. 25, e dovendo avanzar l. 5 la somma sarebbe l. 30. Dando a ciascuno sol. 3, impiegherebbonsi lire 30 , e dovendo mancar lire 4 , la somma sarebbe soltanto lire 26 , invece di essere lire 30. Si ha quì pure adunque l' errore di lire 4 in *meno*.

Sottraendo ora per l' eguaglianza dei segni le l. 4 da l. 6, 10, s'avrà il divisore l. 2, 10, ossia 5 mezze lire.

Moltiplicando lire 6, 10, ossia 13 mezze lire per poveri 200, e lire 4, ossia 8 mezze lire per poveri 100, verranno i prodotti 2600 e 800, che sottratti l' uno dall' altro daranno per dividendo 1800.

Fatta la divisione , s'avrà per quoto il numero dei poveri 360, a cui se si daranno soldi 2, 6 per testa , s' impiegheranno l. 45 , e aggiungendovi l. 5, la somma sarà l. 50; e se si daranno soldi 3 per testa s' impiegheranno l. 54, a formar le quali la

somma di l. 50 mancherà appunto di l. 4.

AVVERTIMENTO. Questo Quesito però senza ricorrere alle false posizioni si può sciogliere facilmente con una operazione semplicissima.

Si sommino le due differenze lire 5, e lire 4, avremo lire 9.

Si sottraggano una dall' altra le quantità che si distribuiscono, cioè ss. 2, 6, e ss. 3, avrem per residuo den. 6.

Si divida la somma l. 9 per den. 6, ossia riducendo le lire a denari, dividansi den. 2160 per den. 6, il quoto 360 indicherà il numero de' poveri.

La ragione di questa operazione si è, che la differenza di l. 9, che passa tra le l. 45, che spendonsi dando a ciascun povero ss. 2, 6, e le lire 54 che si spendono col dare a ciascuno ss. 3, nasce dal dare a ciascuno nel secondo caso 6 denari di più. Le lire 9 adunque ossia i den. 2160 sono il prodotto di den. 6 moltiplicati pel numero de' poveri. Conseguentemente dividendo questo prodotto per den. 6, il quoto dee far il numero dei poveri.

Quesito IV. " Tre compagni *A*, *B*, *C* hanno a dividere fra di loro l. 305 con questa condizione, che la porzione di *A* sia la metà di quello che avanza a *B* dopo che ne sian levate l. 15, e la porzione, di *C* sia eguale a quelle di *A* e *B* prese insieme, più l. 35. Domandasi quanto debba toccare a ciascuno"?

Questo Quesito si riduce alla forma del

Quesito II, cambiando la prima parte dell' esposizione con dire, che *B* debba avere il doppio di *A* più l. 15.

Si potrà adunque, come quello, ridurre ad una falsa posizione semplice, levando prima dalla data somma lire 305 le lire 15 che debbono aggiungersi alla porzione di *B*, e le l. 15 più 35, ossia 50 che debbono aggiungersi alla porzione di *C*, fatte queste sottrazioni la detta somma resterà l. 240.

Or di queste suppongasi che ad *A* ne tocchi l. 1, a *B* ne toccheran l. 2, a *C* l. 3, e prese insieme faran lire 6. Dicasi adunque se della somma lire 6 ad *A* tocca lire 1, della somma lire 240 quante gliene toccheranno? e il quarto termine sarà lire 40.

Diffatti col darne ad *A* l. 40, a *B* l. 80 più 15 che fanno l. 95, e a *C* l. 40 più 95, più 35 che fanno l. 170, la somma sarà appunto l. 305.

Quesito V. " Due giuocano fra di loro. *A* mette a dirittura i suoi denari, e vincendo riceve da *B* altrettanto; *B* mette tutto quello che gli è rimasto, e vincendo egli pure riceve altrettanto da *A*. Dopo questo si trovano con l. 64 per ciascheduno. Domandasi quanto avevano a principio "?

La somma di ambedue secondo i dati è due volte l. 64, cioè in tutto l. 128.

I. Posizione. Suppongasi adunque che *A* avesse a principio l. 38, e *B* l. 90.

A nel primo giuoco raddoppiando il suo ca-

capitale fa l. 76, e *B* perdendo l. 38 resta con l. 52.

Nel secondo giuoco *B* guadagnando lire 52 fa l. 104, e *A* perdendo l. 52 resta con l. 24.

B adunque resta con l. 80 di più, quando dovrebbero restare eguali.

II. Posizione. Suppongasi invece che delle l. 128, *A* ne abbia 58, e *B* 70.

Nel primo giuoco *A* raddoppiando il capitale farà l. 116, e *B* perdendo l. 58 resterà con l. 12.

Nel secondo giuoco *B* guadagnando l. 12 fa l. 24, ed *A* perdendo l. 12 resta con l. 104.

B adunque rimane con l. 80 di meno, quando dovrebbero restare eguali.

Essendo quì i segni contrarj, si sommino le due differenze, e avremo 160 per divisore.

Si moltiplichi la prima differenza 80 col secondo supposto di *B* 70, e avremo 5600; si moltiplichi parimente la seconda differenza 80 col primo supposto di *B* 90, e avremo 8200; e sommando i due prodotti, avremo l. 12800 per dividendo.

Fatta la divisione il quoto esprimente il capitale di *B* sarà l. 80, che sottratto dalla somma di ambedue l. 128, darà per capitale di *A* l. 48.

Pruova. Nel primo giuoco *A* raddoppiando il capitale fa l. 96, e *B* resta con l. 32.

Nel secondo giuoco *B* guadagnando l. 32

fa l. 64, ed *A* perdendo l. 32, resta parimente con l. 64.

AVVERTIMENTO. Questo Quesito si riduce ad una falsa posizione semplice, supponendo che il capitale di *A* sia 3, e quello di *B* sia 5, che sommati iusieme fan 8; poi dicendo: se la somma 8 suppone per capitale di *A* lir. 3, la somma vera lir. 128 quanto darà per capitale di *A*? e il quarto termine sarà l. 48, trovato il quale, risulteranno per capitale di *B* l. 80.

La ragione di questo si è, che supposta la somma totale l. 8, il capitale di *A* l. 3, e quello di *B* l. 5, nel primo giuoco *A* guadagnando l. 3 fa l. 6, e *B* resta con l. 2: nel secondo giuoco *B* guadagnando l. 2 fa l. 4, e *A* resta parimente con l. 4. Non vi ha quì dunque bisogno di una seconda falsa posizione, avendosi dalla prima i due risultati uniformi tra loro, e coerenti alle condizioni del quesito. Basta pertanto, affin di trovare il vero numero, istituire la solita regola di proporzione; giacchè la ragione che passa fra la somma supposta l. 3, e la parte supposta di *A* l. 3, dee passare similmente, date le medesime condizioni, fra la somma vera l. 128 (o qualunque altra si fosse), e la parte vera di *A*.

QUESITO VI. " Tre compagni giuocan fra loro, e trovansi alla fine con lire 100 per ciascheduno; ma fatti i conti risulta che *A* ha guadagnato $\frac{1}{3}$ del capitale di *B*, *B* $\frac{1}{4}$ di quello di *C*, e *C* $\frac{1}{5}$ di quello di *A*. Domandasi qual capitale a principio avessero ciascheduno ". I. Po-

I. Posizione. Suppongasi che *A* avesse a principio lir. 70: perdendone $\frac{1}{5}$ con *C* saran rimaste 56, ma essendosi trovato al fine con lire 100, avrà guadagnato da *B* lire 44.

Essendo le lire 44 un terzo del capitale di *B*, tutto il suo capitale doveva essere l. 132: perdendone adunque un terzo con *A*, a lui rimanevano l. 8, e come al fine si è trovato con l. 100, deve aver guadagnato da *C* l. 12.

Essendo le l. 12 un quarto del capitale di *C*, tutto il suo capitale doveva essere l. 48, e perdendone un quarto con *B*, doveva restare con l. 36, ma egli ha guadagnato $\frac{1}{5}$ del capitale di *A*, cioè l. 14; è dunque rimasto con l. 50, quando doveva anch' egli rimanere con l. 100.

V' è dunque l' errore di l. 50 in meno.

II. Posizione. Suppongasi invece, che *A* avesse l. 75. Perdendone un quinto con *C* rimane con l. 60, e per far 100 dee averne guadagnato 40 da *B*.

Essendo le lire 40 un terzo del capitale di *B*, tutto il suo capitale doveva essere 120; perdendone 40 con *A* deve esser rimasto con 80, e per far 100 deve averne guadagnato 20 da *C*.

Essendo le l. 20 un quarto del capitale di *C*, tutto il suo capitale doveva essere 80, e perdendone 20 con *B* doveva restar con 60; ma egli ha guadagnato un quinto del capitale di *A*, cioè lire 15, dunque è rimasto con l. 75, quando doveva rimanere con 100.

Quì pure adunque si ha l'errore di lire 25 in meno.

Sottraendo ora per l'eguaglianza dei segni i due errori l'uno dall'altro avremo 25 per divisore.

Moltiplicando il primo errore 50 col secondo supposto 75, e il secondo errore 25 col primo supposto 70, avremo 3750, e 1750, che sottratti daranno 2000 per dividendo.

Fatta la divisione, il quoto esprimente il capitale di *A* sarà l. 80, le quali, levandone 16 che egli perde con *C*, e aggiugnendone 36 che guadagna con *B*, faran 100.

Il capitale di B che è il triplo di 36, sarà l. 108, da cui levando 36 che perde con *A*, e aggiugnendo 28 che guadagna con C, resteran similmente 100.

Il capitale di *C* che è il quadruplo di 28 farà l. 112, da cui levando 28 che perde con *B*, e aggiugnendo 16 che guadagna con *A*, rimane egli pure con lire 100.

QUESITO VII. " Tre compagni confrontando i loro denari trovano che *A* ricevendo la metà di quel che han gli altri due, fa l. 38; *B* ricevendo $\frac{1}{4}$ di ciò che han gli altri due, fa l. 29; *C* ricevendo $\frac{1}{3}$ di ciò che han gli altri due, fa l. 35. Domandasi quanto abbiano tutti insieme, e quanto abbia ciascuno "?

I. Posizione. Suppongasi che la somma dei tre capitali sia l. 60.

Levandone 38 resteran 22, il doppio di cui che è 44, esprimerà i capitali *B*, più C, e

C, e per conseguenza il capitale di A sarà 16.

Levandone 29 resteranno 31; a cui aggiungnendo $\frac{1}{3}$ che è 20 $\frac{1}{3}$ avremo 41 $\frac{1}{3}$ esprimente i capitali A più C, e per conseguenza il capitale di B sarà 18 $\frac{2}{3}$.

Levandone 35 resteranno 25, a cui aggiungendo la metà che è 12 $\frac{1}{2}$ avremo 37 $\frac{1}{2}$ esprimente i capitali A più B, e per conseguenza il capitale di C sarà 22 $\frac{1}{2}$.

Si sommino i tre capitali, e avremo 57 $\frac{1}{4}$, quando si dovrebbero aver lire 60. Risulta adunque un errore di l. 2 $\frac{5}{6}$ in meno.

II. Posizione. Suppongasi che la somma dei tre capitali sia invece l. 70.

Operando come sopra, il capitale di A sarà 6, quello di B sarà 15 $\frac{1}{3}$, quello di C sarà 17 $\frac{1}{2}$; e la loro somma sarà 38 $\frac{5}{6}$, quando dovrebbe esser lire 70. Anche quì adunque risulta un errore di 31 $\frac{1}{4}$ in meno.

Ciò posto per l'eguaglianza de' segni sottraggasi un errore dall'altro, e si avrà il divisore 28 $\frac{1}{3}$.

Si moltiplichi il primo errore 2 $\frac{5}{6}$ col secondo supposto 70, e avremo 198; si moltiplichi parimente il secondo errore 31 $\frac{1}{4}$ col primo supposto 60, e avremo 1870, da cui sottraendo il primo prodotto 198 $\frac{1}{2}$ avremo 1671 $\frac{2}{3}$ per dividendo.

Riducendo così il divisore come il dividendo a numeri interi col moltiplicarli per 3, avremo 85, e 5015; e fatta la divisione, risulteran per quoto lire 59 esprimenti la vera somma dei tre capitali A, B, C,

presi insieme; trovata la quale, operando nella 1. posizione, risulteranno per capitale di *A* lir. 17, per capitale di *B* l. 19, e per capitale di *C* l. 23.

Quì la pruova si hà dalla soluzione medesima.

Quesito VIII. " Tre Amici confrontano fra di loro i denari che hanno, e trovasi che *A* ricevendo l. 30 dagli altri due, viene ad averne quante ne restano a *B*, e *C* presi insieme; *B* ricevendo l. 25 viene ad averne il doppio di ciò che resta ad *A*, e *C* presi insieme; *C* ricevendo lire 11 viene ad averne il triplo di ciò che resta ad *A* e *B* presi insieme. Domandasi quanto abbiano tutti insieme, e quanto abbia ciascuno "?

Questo Quesito senza la falsa posizione doppia, può ridursi alla semplice nel seguente modo.

Suppongasi che tutti insieme abbiano l. 12, prendendo il minor numero divisibile esattamente per 2, per 3, e per 4.

Dovendo *A* col suo capitale, e con ciò che riceve dagli altri dee aver quanto ad essi ne resta, avrà la metà di 12, cioè 6.

B dovendo colla stessa condizione aver il doppio degli altri due avrà $\frac{2}{3}$ di 12, cioè 8.

C dovendo per colla stessa condizione aver il triplo degli altri due, avrà $\frac{3}{4}$ di 11, cioè 9.

La somma di queste tre quantità sarà 23.

Or si osservi che questa somma contiene non solamente i tre capitali *A*, *B*, *C*, ma an-

anche la somma di quello che ciascuno di essi riceve dagli altri due . Si sottraggano adunque dalla somma 23 i capitali *A*, *B*, *C*, che presi insieme si sono supposti far l. 12; il residuo 11 esprimerà in tal supposizione la somma di ciò che ciascuno riceve dagli altri due.

Si faccia ora la somma delle vere quantità che ciascun riceve dagli altri, cioè 30, 25, e 11; e questa somma sarà 60.

Dopo questo s' istituisca la seguente regola di proporzione 11 : 12 :: 66 : *x*, mettendo per 1. termine la supposta somma di ciò che ognuno riceve dagli altri due; per 2 la supposta somma dei tre capitali *A*, *B*, *C*, per 3. la vera somma di ciò che ognuno riceve dagli altri due; e cercando per 4. la vera somma dei capitali *A*, *B*, *C*, che si trovera esser l. 72.

Ciò posto ognuno dei tre capitali si scoprirà facilmente con questo raziocinio semplicissimo .

1. Se *A* col suo capitale, e con lire 30 che riceve dagli altri ha la metà di 72, cioè 36, dunque il suo capitale è l. 6.

2. Se *B* col suo capitale, e con l. 25 che riceve dagli altri ha $\frac{2}{3}$ di 72, cioè 48, dunque il suo capitale è l. 23.

3. Se *C* col suo capitale, e con l. 11 che riceve dagli altri ha $\frac{3}{4}$ di 72; cioè 54, dunque il suo capitale è l. 43.

La pruova quì pure si ha dalla soluzione medesima.

QUESITO IX. " Tre compagni si trova

nò provveduti di denaro in questa proporzione, che *A* con lire 80 di più avrebbe il doppio di ciò che insieme han gli altri due, *B* con lire 80 di più avrebbe il triplo de-degli altri due; e *C* con lire 80 di più n' avrebbe il quadruplo. Domandasi quanto abbia ciascuno "?

Anche questo quesito col seguente artificio può ridursi ad una falsa posizione semplice.

Suppongasi adunque che tutti insieme, compreso anche il numero costante da aggiungersi al capital di ciascuno, perchè riesca il doppio, il triplo, il quadruplo di quello degli altri due, abbiano l. 120, che è il minor numero sopra al dato numero 80, il qual sia esattamente divisibile per 3, per 4, e per 5, di cui in seguito avremo a servirci.

Dovendo *A* col suo capitale, e col numero costante aver il doppio degli altri due, egli avrà $\frac{2}{3}$ di 120, cioè 80, e *B* più *C* n'avranno $\frac{1}{3}$, cioè 40.

Similmente dovendo *B* averne il triplo degli altri due, egli avrà $\frac{3}{4}$ di 120, cioè 90, e *A* più *C* n'avranno $\frac{1}{4}$, cioè 30.

In egual modo dovendo *C* aver il quadruplo degli altri due, egli avrà $\frac{4}{5}$ di 120, cioè 66, e *A* più *B* n'avranno $\frac{1}{5}$, cioè 24.

Si sommino le tre quantità 40, 30, e 24, che sono eguali ai capitali *B* più *C*, *A* più *C*, *A* più *B*; e la somma sarà 94.

Questa somma contien due volte i capitali di *A*, *B*, *C*. Si divida adunque per 2, e avre-

e avremo 47 esprimente i capitali di *A*, *B*, *C* presi una volta sola.

Si sottragga il 47 dal numero 120 contenente, giusta la supposizione, i capitali *A*, *B*, *C*, e il numero costante; avremo 73 esprimente il solo numero costante.

Questo 73 levato da 80 supposto di sopra contenere il numero costante più il capitale di *A*, darà il capitale di *A* eguale a 7. Allo stesso modo levando il 73 da 90, e da 96, avremo il capitale di *B* eguale a 17, e quello di *C* eguale a 23.

Ciò posto s'istituiscano tre Regole di proporzione, mettendo in ciascuna per 1. termine il supposto numero costante 73, per 2 i supposti capitali *A* 7, *B* 17, *C* 23; per 3 il vero numero costante 80; e i quarti termini daranno i veri capitali *A* lir. 7 $\frac{40}{73}$, *B* l. 18 $\frac{46}{73}$, *C* l. 25 $\frac{15}{73}$.

Pruova. *A* col suo capitale l. 7 $\frac{40}{73}$, e il numero costante l. 70 avrà in tutto l. 87 $\frac{40}{73}$, che sono appunto il doppio di lir. 43 $\frac{31}{73}$ esprimente i capitali di *B* e *C* presi insieme, cioè di l. 18 $\frac{46}{73}$, più l. 25 $\frac{15}{73}$ Allo stesso modo corrispondenti al quesito si troveranno i capitali di *B* e di *C*.

Quesito X. " Tre compagni debbono fare una spesa comune, la quale ascende a l. 600. Per formar questa somma ad *A* manca la metà di ciò che han gli altri due, a *B* manca $\frac{1}{3}$ del capitale degli altri due, a *C* manca $\frac{1}{4}$ del capitale degli altri due. Domandasi quanto abbia ciascuno "?

Anche questo Quesito potrà ridursi ad u-

na falsa posizione semplice, col seguente raziocinio.

I capitali di A, B, C secondo le condizioni del Quesito debbono esser tali, che o prendasi il capitale di A colla metà di quello degli altri due, o il capitale di B col terzo di quello degli altri due ec., pagata la spesa comune, dalla somma dei tre capitali deve sempre avanzare lo stesso numero. Da questo viene di conseguenza, che lo stesso numero deve pur avanzare levando la metà dei capitali B più C, il terzo dei capitali A più C, e il quarto dei capitali A più B.

Ciò posto per esprimere i capitali B più C, A più C, A più B si scelgan numeri tali, che levando dal primo la metà, dal secondo $\frac{1}{3}$, dal terzo $\frac{1}{4}$ si abbia sempre il medesimo avanzo.

A tal fine suppongasi che il capitale B più C sia 24; levandone la metà resteran 12. Al 12 s' aggiunga la sua metà 6; avremo 18 esprimente i capitali A più C, da cui levando $\frac{1}{3}$ che è 6, rimarran 12 come sopra. Allo stesso 12 s' aggiunga il suo terzo che è 4; avremo 16 esprimente i capitali A più B, da cui levando $\frac{1}{4}$ rimangon 12 parimente.

Or si sommino le tre quantità 24, 18, e 16 che sono eguali ai capitali B più C, A più C, A più B; e la somma sarà 58.

Questa somma contiene due volte i capitali A, B, C. Dividasi adunque 58 per 2, e avremo 29 esprimente i capitali A, B, C presi una volta sola. Da

Da 29 sottraggasi il 12 che è il numero che deve avanzare dalla somma dei tre capitali, dopo pagata la spesa comune. Questa spesa comune in tal supposizione risulterà a 17.

Dallo stesso 29 si levi il capitale di *B* più *C*, che è 24; resteran 5 per capitale di *A*. Al medesimo modo levandone 18 resteran 11 per capitale di *B*, e levandone 16 resteran 13 per capitale di *C*.

Or s' istituiscano tre Regole di Proporzione mettendo per 1. termine la supposta spesa comune 17; per 2. i supposti capitali *A* 5, *B* 11, *C* 13; per 3. la vera spesa comune l. 600; e i quarti termini daranno i veri capitali *A* l. 176 $\frac{9}{17}$, *B* l. 388 $\frac{4}{17}$, *C* l. 458 $\frac{24}{17}$.

Pruova. Al capitale di *A* l. 175 $\frac{9}{17}$ si aggiunga la metà dei capitali *B* più *C*, che è l. 413 $\frac{0}{17}$; la somma sarà eguale appunto alla data spesa comune l. 600. Lo stesso sarà cogli altri capitali *B* e *C* a proporzione.

Quesito XI. " Due compagni hanno fatta società di negozio: il secondo *B* ha posto l. 600 più del primo; tutto il guadagno è stato l. 2000; e al primo *A* son toccate di sua porzione lir. 916 $\frac{2}{3}$. Domandasi qual sia stato il capitale di ciascuno "?

I. Posizione. Suppongasi che *A* v' abbia posto lir. 1000; *B* n' avrà posto 1600; e la somma totale sarà stata lir. 2600.

Con questo cerchisi se il capitale di *A* corrisponda realmente a lir. 2000, dicendo:

Se

Se il guadagno lir. 2000 è venuto dal total capitale l. 2600; il guadagno di *A* lir. 916 $\frac{2}{3}$ da qual capitale deve esser venuto? e il quarto termine sarà lir. 1191 $\frac{2}{3}$, invece di lir. 1000.

Si avrà dunque un errore di lir. 191 $\frac{2}{3}$ in *più*.

II. Posizione. Suppongasi invece che il capitale di *A* fosse lir. 1200; quello di *B* sarà stato lir. 1800; e la somma totale sarà stata lir. 3000.

Dicasi come sopra: se lir. 2000 sono venute da lir. 3000; lir. 916 $\frac{2}{3}$ da quante saran venute? e il quarto termine sarà lire 1375, quando doveva essere lir. 1200.

Quì pure dunque avremo un errore di lir. 175 in *più*.

Ciò posto per l'eguaglianza de' segni sottraggasi un errore dall'altro, e avremo 16 $\frac{2}{3}$ per divisore.

Si moltiplichi il primo errore pel secondo supposto, e il secondo errore pel primo supposto, e avremo 230000, e 75000, che sottratti un dall'altro daranno l. 55000 per dividendo.

Moltiplicando e il divisore, e il dividendo per 3, avremo 50, e 165000; e fatta la divisione, il quoto lire 3300 esprimerà il capitale di *A*, per cui quello di *B* sarà l. 3900, la somma totale sarà lir. 7200, e il guadagno di *B* sarà lir. 1083 $\frac{1}{3}$ come potrà verificarsi alla pruova.

AVVERTIMENTO. Il presente Quesito però senza ricorrere alla falsa posizione scioglie-

gliesi anch' esso facilmente nella seguente maniera .

Si moltiplichi il guadagno di *A* lir. 916 $\frac{2}{3}$ per le lir. 600, che *B* ha posto di più, e il prodotto sarà lir. 550000.

Lo stesso guadagno di *A* lir. 916 $\frac{2}{3}$ si moltiplichi pel numero de' compagni 2 , e il prodotto sarà lir. 1833 $\frac{1}{3}$.

Questo prodotto si sottragga dal guadagno totale lir. 2000 , e il residuo sarà lir. 166 $\frac{2}{3}$.

Per questo residuo si divida il primo prodotto lir. 550000 (ossia per ridurre il divisore a numero intero si moltiplichi prima per 3 così lui, come il dividendo , poi si divida il risultato 1650000 per 500); il quoto lir. 3300 darà il capitale di *A* .

La ragione di questa operazione è la seguente. Se i due compagni avesser posto un egual capitale, il guadagno totale sarebbe stato eguale al guadagno di *A* moltiplicato pel numero de' compagni , cioè lir. 1833 $\frac{1}{3}$.

Sottraendo queste dal vero guadagno totale lir. 2000, il residuo lir. 165 $\frac{2}{3}$ indica ciò che *B* ha guadagnato colle lir. 600 di più.

Non resta adunque che fare una semplice Regola di Proporzione , dicendo : Se il guadagno lir. 166 $\frac{2}{3}$ viene dal capitale lir. 600 ; il guadagno di *A* lir. 916 $\frac{2}{3}$ da qual capitale dee venire? E moltiplicando come sopra lir. 916 $\frac{2}{3}$ per lir. 600, poi dividendo il prodotto lir. 550000 pel primo termine lir. 166 $\frac{2}{3}$ si ha per quarto termine il capitale di *A* lir. 3300.

Quesito XII. " *A* prestò a *B* un capita-

tale di lir. 3000 per anni 3 $\frac{1}{2}$ al 10 per 100 l'anno. Domandasi qual annua somma dovrà *B* assegnare per estinguere al termine degli anni 3 $\frac{1}{2}$ e interessi, e capitale"?

I quesiti di questo genere colla doppia falsa posizione si risolvono nel modo seguente.

I. Posizione. Suppongasi che la somma assegnata sia lir. 1000, e veggasi con un conto a tirone, se con questa dopo anni 3 $\frac{1}{2}$ rimarranno estinti realmente e interessi e capitale. Il conto a tirone sarà il seguente.

Capitale impreſtato . .	lir. 3000
Inter. del 1. Anno - - -	lir. 300
Sommano	lir. 3300
Pagasi l'annua somma . .	lir. 1000
Restano	lir. 2300
Inter. del 2. Anno	lir. 230
Sommano	lir. 2530
Pagasi l'annua somma . .	lir. 1000
Restano	lir. 1530
Inter. del 3. Anno . . .	lir. 153
Sommano	lir. 1683
Pagasi l'annua somma . .	lir. 1000
Restano	lir. 683
Inter. di Mesi 6.	lir. 34. 3
Sommano	lir. 717. 3
Si pagano per Mesi 6 . .	lir. 500
Restano	lir. 217 3

Coll'assegnare adunque lir. 1000 all'anno, per estinguere interessi, e capitale mancano lir. 217. 3.

II. Posizione. Per procedere regolarmente, par che dovrebbe supporsi un' annua somma maggiore, per esempio lir. 2000. Ma siccome dopo 2 anni il capitale cogl'interessi sarebbe estinto, e avrebbesi già un avanzo di lir. 570; così suppongasi invece un'altra somma minore, per esempio, lir. 500, e veggasi quanto mancherà con questa ad estinguere interessi, e capitale; poi operando sui due errori secondo le regole della doppia falsa posizione, si avrà la vera somma da assegnarsi.

Il secondo conto a tirone sarà adunque, come segue:

Capitale impreſtato . . .	lir. 3000
Inter. del 1. Anno	lir. 300
Sommano	lir. 3300
Pagasi l'annua somma . .	lir. 500
Restano	lir. 2800
Inter. del 2. Anno	lir. 280
Sommano	lir. 3080
Pagasi l'annua somma . .	lir. 500
Restano	lir. 2580
Inter. del 3. Anno	lir. 258
Sommano	lir. 2833
Pagasi l'annua somma . .	lir. 500
Restano	lir. 2338

Capit. residuo riportato	lir. 2338
Inter. di Mesi 6 - - - - -	lir. 116. 18
Sommano - - - -	lir. 2454. 18
Pagansi per Mesi 6	lir. 250
Restano - - - - - -	lir. 2204. 18

Dunque coll'assegnare lir. 500. all'anno, per estinguere interessi e capitale mancano lir. 2204. 18.

Sottraggasi ora per l'eguaglianza dei segni un errore dall'altro, e avremo l. 1987 15 per divisore.

Si moltiplichi il primo errore pel secondo supposto, e il secondo errore pel primo supposto, e avremo lire 108575, e lire 2204900, che fatta la sottrazione daranno lir. 2096325 per dividendo.

Affin di ridurre il divisore a numero intero della medesima specie, si moltiplichi divisore e dividendo per 4; quello diventerà 7951, e questo 8385300; e fatta la divisione, il quoto esprimente l'annua somma da assegnarsi sarà l. 1054. 12. $5\frac{2}{7}\frac{3}{9}\frac{4}{5}\frac{1}{1}$.

AVVERTIMENTO. V'ha però un altro metodo più facile per trovar l'annua somma, qualunque sia il numero degli anni, senza ricorrere alle false posizioni. Cerchisi prima colla regola del Merito doppio (pag. 90) a quanto ascenderà in anni $3\frac{1}{2}$ il capitale di lir. 3000 co' suoi interessi di lir. 10 per 100 a capo d'anno. La somma sarà lir. $4192\frac{65}{100}$. Si cerchi in seguito l'interesse annuo di questa somma, che

sarà

sarà lir. 419 $\frac{265}{100}$. Si sottragga poi dalla detta somma il capitale lir. 3000; il residuo lir. 1192 $\frac{65}{100}$ indicherà gl' interessi a Merito doppio accumulati in anni $3\frac{1}{2}$. Finalmente s' istituisca questa proporzione: Così i detti interessi lir. 1192 $\frac{65}{100}$ a lir. 419 $\frac{265}{100}$ interesse annuo della somma totale, come il capitale lir. 3000 all' annua somma che si cerca; e questa risulterà come sopra a lir. 1054. 12. 5. ec.

Pruova. Questa si farà con un conto a tirone, osservando se coll' annua somma di lir. 1054. 12. 5 ec. il capitale di lir. 3000 in An. 3. 6 realmente rimanga estinto coi suoi interessi.

Quesito XIII. " *A* presta a *B* un capitale di lir. 8000 al 5 per 100 l' anno, e *B* gli assegna a conto d' interesse, e di capitale l' annua somma di lir. 2600. Domandasi in quanto tempo il capitale co' suoi interessi rimarrà estinto "?

Incominciasi con un conto a tirone a veder quanto estinguasi di anno in anno.

Capitale al 5 per 100 .	lir. 8000
Interesse del primo anno -	lir. 400
Sommano - - - - -	lir. 8400
Pagasi l' annua somma -	lir. 2600
Restano - - - - -	lir. 5800
Interesse del secondo anno -	lir. 290
Sommano - - - - -	lir. 6090
Pagasi l' annua somma -	lir. 2600
Restano - - - - -	lir. 3490

Capit. residuo riportato	lir. 3490
Interesse del terzo anno -	lir. 174 10
Sommano - - - -	lir. 3694 10
Pagasi l' annua somma -	lir. 2600. -
Restano - - - - -	lir. 1064. 10

Essendo dopo tre anni il capital residuo anche co' suoi interessi minore dell' annua somma, per estinguerlo non sarà più necessario un anno: Veggasi adunque colla doppia falsa posizione in quanti mesi rimarrà estinto.

I. Posizione. Suppongasi che si richieggano mesi 6. Gl' interessi di lir. 1064. 10 al 5 per 100 in mesi 6 sono lir. 20. 12. 3 che unite al capitale fan lir. 1091. 2. 3. Or pagandosi per mesi 6 la metà dell' annua somma, che è lir. 1300, crescono lir. 208. 17 9.

II. Posizione. Suppongasi invece che bastino mesi 4. Gl' interessi di lir. 1064. 10 per mesi 4 sono lir. 17. 14. 10., che aggiunte al capitale fan lir. 1082. 4. 10. Ma pagandosi per mesi 4 il terzo dell' annua somma, che porta lir. 866, 13. 4, mancano l. 215. 11. 6.

Si sommino adunque per la contrarietà de' segni i due errori, e avremo 424. 9. 3 per divisore.

Si moltiplichi il primo errore pel secondo supposto, e il secondo errore pel primo supposto, e avremo lir. 835. 11, e lir. 1293. 9 che sommate daranno l. 2129 per dividendo.

Si

Si riduca divisore e dividendo a denari. Il primo sarà 101871, il secondo 510960; e fatta la divisione, si avran per quoto mesi 5 col residuo $\frac{1}{1}\frac{6}{5}\frac{0}{1}\frac{5}{7}\frac{}{1}$ equivalente ad ore 11 $\frac{1}{3}$ circa.

Pruova. L'interesse di lir. 1604 10 al 5. per 100 l'anno in mesi 5: -- 11 $\frac{1}{3}$ è prossimamente lir. 22. 4. 10, che aggiunte al capitale fan lir. 1086. 14. 10, e tale appunto prossimamente è ciò che deve pagarsi nei suddetti mesi 5. —. 11 $\frac{1}{3}$ a ragione di l. 2600 all'anno.

AVVERTIMENTO. Il tempo preciso, in cui dopo i 3 anni il capitale co'suoi interessi rimarrà estinto, può trovarsi ancora più facilmente in altro modo senza la falsa posizione. Cerchisi prima l'interesse annuo del residuo capitale lir. 1064. 10, che è lir. 53. 4. 6. Questo dividasi per 12 mesi e il quoto sarà lir. 4. 8. 8 $\frac{1}{2}$. Dividasi parimente per 12 mesi l'annua somma l. 2600, e il quoto sarà lir. 216. 13. 4. Da queste sottraggasi il suddetto interesse mensuale lir. 4. 8. 8 $\frac{1}{2}$, resteranno lir. 212. 4. 7 $\frac{1}{2}$ esprimenti la porzione dell'annua somma, che ogni mese, prededotti gl'interessi, va in estinzione del capitale. Ciò posto si dica: se lir. 212. 4. 7 $\frac{1}{2}$ di capitale si estinguono in mese 1; lir. 1061. 10 in quanti mesi si estingueranno? e il quarto termine sarà mesi 5 —. 11 $\frac{1}{3}$ come sopra.

Quindi se *A* avesse in affitto un podere di *B* a l. 2600 l'anno, e gli facesse l'anticipazione di l. 8000 al 5 per 100 l'anno, egli go-

goderebbe il podere a conto di questa anticipazione per Anni 3, Mesi 5, Ore 11 $\frac{1}{3}$.

QUESITO XIV " Domandasi qual fosse il capitale prestato da *A* a *B* al 5 per 100, che coll'annua somma di lir. 5000 è stato estinto in anni 4 unitamente a' suoi interessi pagati a capo d'anno "?

1. Suppongasi che fosse l. 20000. Con un conto a tirone si troverà, che dopo anni 4 crescono lir. 2759. 10.

2. Suppongasi che fosse l. 18000. Col suddetto conto si troverà, che crescono tuttavia lir. 328. 9. 9.

3. Sottratti gli errori il divisore sarà lir. 2431. - 3.

4. Moltiplicato il primo errore pel secondo supposto, e viceversa, poi sottratti i prodotti, il dividendo sarà lir. 43101250.

5. Ridotto il divisore e il dividendo alla stessa specie col moltiplicarli per 80 (giacchè essendo 3 denari la quarta parte d' un soldo, invece di ridurli a denari col moltiplicarli per 20, e per 12, basta ridurli a quarti di soldo moltiplicandoli per 20, e per 4, ossia a dirittura per 80), il primo sarà 194481, il secondo sarà 3448100000.

6. Fatta la divisione, il quoto esperimente il capital ricercato sarà lir. 17729. 15 con un residuo minore di un denaro.

Pruova. Col conto a tirone, posto il capitale di lir. 17729. 15 al 5 per 100, si troverà che coll'annua somma di lir. 5000 esso realmente in 4 anni rimane estinto co' suoi interessi, eccetto una piccolissima differe-

ferenza pel residuo trascritto nel capitale.

Quesito XV." Domandasi qual fosse l' interesse per cento d' un capitale di l. 2700, che coll' annua somma di lir. 100 è stato estinto in 3 anni unitamente a' suoi interessi a capo d'anno "?

Il presente Quesito è in tutto simile al Quesito VII. proposto Par. II. p. 163, dove cercavasi quanto guadagni per 100 all'anno un Negoziante, che avendo comperate lib. 100 di seta a lir. 28 la libbra in contanti, le rivenda lo stesso giorno a lir. 30 la libbra da pagarsi in tre rate eguali nel termine di 3 anni. Imperocchè il capitale speso dal Negoziante sarebbe appunto in tal caso lir. 2700, e il ricavato sarebbe lir. 3000. pagate in 3 anni coll'annua somma di lir. 1000.

Dalla soluzione che colà abbiamo dato, il guadagno, ossia l' interesse per 100 all' anno risulta a lir. 5 $\frac{5}{9}$, vale a dire a lir. 5. 11. 1 $\frac{1}{9}$.

Abbiamo però avvertito, che questa soluzione non dà il vero interesse, ma soltanto un interesse d'approssimazione.

Per trovare il vero intereſſe

In 1. luogo suppongasi che questo sia del 3 per 100, e con un conto a tirone veggasi, se il capitale lir. 2700 al 5 per 100 coll'annua somma di lir. 1000 dopo 3 anni rimanga estinto realmente co' suoi interessi.

Capit. al 5 per 100	lir. 2700
Inter. del 1. Anno	lir. 135
Sommano	lir. 2835
Pagasi l'annua somma	lir. 1000
Restano	lir. 1835
Inter. del 2. Anno	lir. 91. 15
Sommano	lir. 1926 15
Pagasi l'annua somma	lir. 1000 --
Restano	lir. 926. 15
Inter. del 3. Anno	lir. 46. 6. 9
Sommano	lir. 973. 1. 9
Pagasi l'annua somma	lir. 1000. --,--
Crescono	lir. 26. 18. 3

Abbiam dunque l'errore di lir. 26. 18. 3 in *più*.

In 2. luogo suppongasi che l' interesse sia pel 6 per 100, e s' istituisca quest' altro conto a ritroso:

Capit. al 6 per 100	lir. 2700. ... ...
Inter. del 1. anno	lir. 162. ... ...
Sommano	lir. 2862. ... ...
Pagasi l'annua somma	lir. 1000. ... ...
Restano	lir. 1862
Inter. del 2. anno	lir 111. 14. $4\frac{4}{5}$
Sommano	lir. 1973. 14. $4\frac{4}{5}$

Pa-

Pagasi l'annua somma	lir. 1000.	...	...	
Restano - -	lir. 973.	14.	4.	
Inter. del 3. anno	lir. 58	8.	5 $\frac{4}{5}$	
Sommano - -	lir. 1032.	2.	10 $\frac{2}{5}$	
Pagasi l'annua somma	lir. 1000.	--	,	
Restano -	lir. 32.	2,	10	

Abbiamo adunque l'errore di lir. 32. 2. 10 $\frac{2}{5}$ in *meno*.

Per la contrarietà de' segni si sommino i due errori, e avremo lir. 59. 1. 1 $\frac{2}{5}$ per divisore, che ridotto a denari diventerà 14173 $\frac{2}{3}$, e moltiplicato per 5, onde togliere la frazione, darà 70867.

Si moltiplichi quindi il primo errore pel secondo supposto, e il secondo errore pel primo supposto, e avremo i due prodotti lir. 161. 9. 6, e lir. 160. 14. 4, che sommati daranno lir. 322. 3. 10, ridotti a denari faranno 77326, e moltiplicati per 5 daranno 386630 per dividendo.

Fatta la divisione, il quoto esprimente l'annuo interesse cercato sarà lire 5. 9. 2 $\frac{6043}{7057}$.

Pruova. Questa si farà cercando con un altro conto a tirone, se il capitale l. 2700 al suddetto interesse per 100 coll' annua somma di lir. 1000 in 3 anni realmente s' estingua unitamente a' suoi interessi. E per maggiore facilitazione del calcolo potrà anche ommettersi la frazione, che accompa-

gna l'intereſſe trovato, scrivendo soltanto lir. 5. 9. 2; giacchè la differenza che ne verrà sarà così piccola, che si vedrà abbastanza doversi attribuire alla frazione non calcolata.

Cap. a l. 5. 9. 2 per 100 lir. 2700. --. --
Inter. del 1. Anno lir. 147. 7. 6

Sommano - - lir. 2847. 7. 6
Pagaſi l'annua somma lir. 1000.

Restano - - - lir. 1847. 7. 6
Inter. del 2. Anno - lir. 100. 17. -- $\frac{1}{2}$

Sommano - - lir. 1948. 4. 6 $\frac{1}{2}$
Pagasi l'annua somma lir. 1000. --- --

Restano - - - lir. 948 4. 6 $\frac{1}{2}$
Inter. del 3. Anno - lir. 51. 15. $\frac{7}{10}$

Sommano - - lir. 999 19 8 $\frac{2}{10}$
Pagasi l'annua somma lir. 1000. --- - —

Crescono - - lir. — ---. $3\frac{8}{10}$

I denari $3\frac{8}{10}$ che crescono dipendono dalla frazione che accompagna l'intereſſe lir. 5. 9. 2, non calcolata, e da alcune altre piccole frazioni, che nel conto per maggiore speditezza si son valutate più per approssimazione, che con esatto rigore.

E' da avvertire che la soluzione che si è data di questo Quesito colla doppia falsa posizione è riuscita giusta per accidente.

Con-

Conviene però avvertire, che la regola è fallace, e non varrebbe per altri Quesiti di simil genere: ed eccone la ragione. Quando cercasi l'interesse per 100, e si suppone che sia il 5, o il 10 per 100, ciò è lo stesso come supporre che sia $\frac{1}{20}$, o $\frac{1}{10}$ del capitale. Per supposti numeri adunque si prendono delle frazioni, laddove secondo la formola, da cui dipende la regola della doppia falsa posizione, i numeri supposti debbono sempre essere interi, e liberi da ogni frazione, come si dirà nell' Appendice quì appresso. Colla doppia falsa posizione pertanto questi quesiti non posson trattarsi, e per averne la soluzione esatta convien ricorrere all'algebra, in cui risulta un' equazione di tanti gradi, quanto è il numero degli anni, in cui il capitale unitamente agl' interessi che si ricercano, per mezzo della data annua somma è rimasto estinto.

Quesito XVI. " A prende a pigione da B una casa per anni 2 a lir. 1200 l' anno, da pagarsi però di semestre in semestre, che è quanto dire a lir. 600 ogni semestre. Fatta l' investitura, egli somministra a B lir. 1500 coll' interesse del 5 per 100 l' anno, a condizione però, che questo capitale co' suoi interessi debba estinguersi in anni 2 con una somma da detrarsi di semestre in semestre dalla pigione di lir. 600. Domandasi quanto rimarrà ad A da doversi pagare ogni semestre "?

Per trovare la somma semestrale, che pos-

possa estinguere in anni 2 il capitale di l. 1500 cogl' interessi del 5 per 100. l'anno:

1. Suppongasi che questa sia di lir. 337. 10, e s'istituisca il seguente conto a tirone.

Cap. a l. 5 per 100 l'anno	lir.	1500. --
Inter. del 1. semestre	lir.	37. 10
Sommano -	lir.	1537. 10.
Pagasi il 1s semestre	lir.	337. 10.
Restano	lir.	1200. --
Inter. del 2. semestre	lir.	30. --
Sommano -	lir.	1230. --
Pagasi il 2. semestre	lir.	337. --
Restano	lir.	892. 10.
Inter. del 3. semestre	lir.	21. 6. 3
Sommano -	lir.	914. 16. 3
Pagasi il 3. semestre	lir.	337. 10 --
Restano -	lir.	577. 6. 3
Inter. del 4. semestre	lir.	14. 8. $7\frac{7}{8}$
Sommano -	lir.	591. 14 $10\frac{7}{8}$
Pagasi il 4. semestre	lir.	337. 10 --
Restano -	lir.	254. 4 $10\frac{7}{8}$

Ad estinguere adunque il detto capitale mancano lir. 244. 4. 10 $\frac{7}{8}$.

2. Suppongasi che la somma semestrale debba essere invece di lir. 437. 10. Con egual

egual conto a tirone si troverà che dopo il 4 semestre crescono lir. 161. -- 1. $\frac{1}{2}$.

Per la contrarietà de' segni si sommino i due errori, e avremo per divisore l. 415. 5. -- $\frac{3}{8}$ she ridotto a ottavi di denaro darà 797283.

Si moltiplichi quindi il primo errore pel secondo supposto, e viceversa; e sommati i prodotti, avremo per dividendo l.165571 18.8 $\frac{1}{1}\frac{1}{6}$, che moltiplicato come il divisore per 20, per 12, e per 8, darà 327898112 $\frac{1}{2}$.

Fatta la divisione avrem per quoto l.393 14. 6 con una frazione di $\frac{3}{7}\frac{4}{6}\frac{7}{7}\frac{5}{2}\frac{2}{8}\frac{9}{3}$ di denaro da trascurarsi.

La somma adunque da pagarsi ogni semestre per estinguere in anni 2 il capitale di lir. 1500 cogl' interessi del 5 per 100 l' anno è lir. 398. 14. 6; e dedotta questa dalla pigione semestrale di lir. 600, resteranno ad *A* da pagarsi per ogni semestre lir. 201. 5. 6.

Pruova. Con un conto a tirone, come sopra, si troverà che il capitale lir. 1500 colla somma semestrale di lir. 398. 14. 6. rimane realmente estinto insieme co' suoi interessi in anni 2. colla sola differenza di 1 denaro per la frazione trascurata di sopra.

APPENDICE.

Dei casi, in cui la Regola della doppia falsa posizione può riuscire fallace, e della maniera di distinguerli, e di rimediarvi.

PEr la formola algebraica, da cui dipende la regola della doppia falsa posizione, nè il vero numero ricercato, nè i due numeri che si suppongono, possono mai essere denominatori di alcuna frazione, nè divisori di alcun numero (*).

Quindi è che nell' intavolazione del quesito, e nelle operazioni che si fanno per la soluzione del medesimo, convien guardarsi, che niuno de' numeri supposti o solo, o mescolato con altri, sia mai denominatore nè divisore, altrimenti la detta regola nel risultato finale non darà più il vero numero che si ricerca, ma ne darà un altro totalmente diverso, epperò falso.

Tutto questo si farà chiaro con varj esempi, incominciando da uno semplicissimo, perchè meglio apparisca a quali strani risultati conduca siffatta Regola, quando non si abbia la suddetta avvertenza; e al tempo medesimo con quale facilità vi si possa rimediare.

QUESITO I. " Trovare un numero, per cui

(*) V. *Opuscoli scelti sulle Scienze, e sulle Arti*. Tom. VIII. p. 73. Milano presso Giuseppe Marelli.

cui dividendosi il numero 30, il quoto sia 3 ".

Dalla sola proporzione del quesito ognun vede subito, che questo numero deve essere il 10. Ciò nondimeno intavolando il quesito secondo la proposta condizione, e sciogliendolo colla Regola ordinaria della doppia falsa posizione, si vedrà qual numero ne risulti diverso affatto, e disparato.

1. Suppongasi, che il cercato numero sia 6. Dividendo 30 per 6, il quoto invece di 3 sarà 5, e avremo l' errore di 2 in *più*.

2. Suppongasi, che sia 5. Dividendo 30 per 5, il quoto invece di 3 sarà 6, e avremo l' errore di 3 similmente in *più*.

Per l' eguaglianza de' segni si sottragga un errore dall' altro, e avremo 1 per divisore.

Si moltiplichi il primo errore pel secondo supposto, e viceversa; i prodotti saranno 10, e 18, e sottratto un prodotto dall' altro, avremo 8 per dividendo.

Fatta la divisione avremo 8 pel numero ricercato, il quale ognun vede quanto sia lungi dal vero.

Per ritrovare adunque il vero numero, s' intavoli invece il Quesito in maniera che i numeri supposti non abbian più ad essere divisori. Si osservi pertanto che la stessa cosa è il cercare un numero, per cui dividendosi il 30 dia 3, come il cercare un numero, che moltiplicato per 3 dia 30. Intavolato adunque il Quesito come se fosse proposto in questa seconda maniera.

1. Suppongasi, come sopra, che il cercato

cato numero sia 6. Moltiplicando il 6 per 3 avrem 18 invece di 30; e perciò un errore di 12 in *meno*.

2. Suppongasi che sia 9. Moltiplicando il 9 per 3 invece di 30 avremo 27, e perciò un altro errore di 3 in *meno*.

Sottratto un errore dall' altro per l'eguaglianza de' segni, avremo 9 per divisore.

Moltiplicato il primo errore pel secondo supposto, e viceversa, i prodotti saranno 108, e 18, che sottratti un dall'altro daran 90 per dividendo.

Fatta la divisione si avrà il vero numero ricercato 10.

QUESITO II. "Un corriere A in mezza giornata fa 10 miglia più di un altro B. Si cerca qual sia il viaggio di amendue, sapendosi che la somma dei due viaggi divisa per $\frac{5}{4}$ del viaggio di B dà 2 per quoto"?

Intavolando il Quesito, come è proposto, e sciogliendolo alla maniera ordinaria:

1. Suppongasi che il viaggio di B sia 10 miglia, quello di A sarà 10, la somma 30; e questa divisa per $\frac{5}{4}$ di 10, ossia per 12 $\frac{1}{2}$ darà 2 $\frac{2}{5}$ invece di 2, e si avranno $\frac{2}{5}$ in *più*.

2. Suppongasi che il viaggio di B sia 15; quello di A sarà 25, la somma 40, e questa divisa per $\frac{5}{4}$ di 15, ossia per 18 $\frac{3}{4}$, invece di 7, darà 2 $\frac{2}{15}$, e si avran parimente $\frac{2}{15}$ in *più*.

Terminata l'operazione il viaggio di B risul-

risulterà a miglia 17 $\frac{1}{2}$ che assolutamente è falso; poichè quello di A sarebbe 27 $\frac{1}{2}$, la somma 45; e questa divisa per $\frac{5}{4}$ di 17 $\frac{1}{2}$, ossia per $\frac{175}{8}$ invece di 3 dà 2 $\frac{10}{175}$, o 2 $\frac{2}{35}$.

Per trovare adunque il vero numero, si osservi che se la somma dei due viaggi divisa per $\frac{5}{4}$ del viaggio di B è uguale a 2, ne viene che $\frac{5}{4}$ del viaggio di B moltiplicati per 2 debbon essere uguali alla detta somma. Con qussto principio:

1. Suppongasi, come sopra, che il viaggio di B sia 10 miglia; quello di A 20, la somma 30. Moltiplicando $\frac{5}{4}$ di 10, ossia 12 $\frac{1}{2}$ per 2, invece di 30, avrem 25, e perciò l' errore di 5 in *meno*.

2. Suppongasi che il viaggio di B sia 5, quello di A 25, e la somma 40 moltiplicando $\frac{5}{4}$ di 15, ossia 18 $\frac{3}{4}$ per 2, invece di 40, avremo 37 $\frac{1}{2}$, e perciò l' errore di 2 $\frac{1}{2}$ parimente in *meno*.

Sottratti ora gli errori un dall' altro avremo per divisore 2 $\frac{1}{2}$.

Moltiplicando il primo errore pel secondo supposto, e viceversa; avremo 75, e 23, che sottratti un dall' altro daran 50 per dividendo.

Fatta la divisione, il vero numero ricercato, esprimente il viaggio di B, sarà 20 miglia, e perciò quella di A sarà 30, la somma 50; e questa divisa per $\frac{5}{4}$ di 20, ossia per 25 darà appunto 2 per quoto.

Quesito III. " Due merci sono costate l' una 12 lire più dell' altra. Domandasi il

prezzo di amendue, sapendosi che la somma dei due prezzi più 20., divisa pel minor prezzo meno 4, è uguale a 4 "?

Intavolando il Quesito, come è proposto, anche quì la soluzione sarà erronea. Infatti:

Nella 1. Posizione il minor prezzo sia 30; il maggiore sarà 42, la somma 72, che accresciuta di 20 darà 92, e divisa per 30 meno 4, ossia per 26, invece di 4, darà 2 $\frac{7}{13}$? onde si avrà l'errore di $\frac{7}{13}$; in *meno*.

Nella 2. Posizione il minor prezzo sia 16; il maggiore sarà 18, la somma 44, che accresciuta di 20 farà 64, e divisa per 16 meno 4, ossia per 12, invece di 4, darà 5 $\frac{1}{3}$; onde si avrà l'errore di 1 $\frac{1}{7}$ in *più*.

Terminata l'operazione, il minor prezzo risulterà a lir. 7 $\frac{1}{35}$, valore troppo lontano dal vero, poichè il maggiore sarebbe 19 $\frac{3}{35}$, la somma 26 $\frac{3}{35}$, che divisa per 7 $\frac{1}{35}$ meno 4 ossia per 3 $\frac{3}{35}$, in luogo di 4, darà 8 $\frac{9}{108}$.

Invece adunque si osservi, che per le condizioni medesime del Quesito il numero 4, moltiplicato pel minor prezzo meno 4, deve essere eguale alla somma dei due prezzi più 20. Ciò posto:

1. Il minor prezzo sia lir. 39, come sopra, il maggiore 42, la somma 72, e colle 20 d'aggiunte sia 92. Moltiplicando il 4 per 30 meno 4, ossia per 26, invece di 92, avremo 104; e perciò l'errore di 12 in *più*,

2. Il

2. Il minor prezzo sia lir. 16, il maggiore 28, la somma 44, e colle 20 d'aggiunta sia 64. Moltiplicando il 4 per 16 meno 4, ossia per 12; invece di 64, avrem 48, e perciò l'errore di 16 in *meno*.

Sommando i due errori, avrem 28 per divisore.

Moltiplicando il primo errore pel secondo supposto, e viceversa, avremo 192, e 480, che sommati daranno 672 per dividendo.

Fatta la divisione, il minor prezzo ricercato sarà 24, il maggiore 36, la somma 60, che accresciuta di 20 diverrà 80; e questa divisa per 24 meno 4, ossia per 20 sarà appunto eguale a 4.

QUESITO IV. *Due compagni* A, *e* B *istituiscono un negozio. Il secondo* B *vi mette* 1400 *scudi più di* A; *il guadagno totale è di scudi* 1000, *il guadagno di* A *è di scudi* 400. *Domandasi qual fosse il capitale di ciascuno?*

Questo Quesito è in tutto simile al Quesito XI. Par. II. p. 221, dove abbiam dimostrato, come ei si possa sciogliere e colla doppia falsa posizione, e senza di essa.

Ma volendolo sciogliere colla doppia falsa posizione, egli può intavolarsi in quattro maniere, due delle quali soltanto danno per risultato finale il vero numero che si ricerca, e le altre due lo danno falso.

Suppongasi che il capitale di *A* sia 1000 scudi, e perciò quello di *B* 2400, e la somma 3400.

Nella prima posizione può dirsi:

1. Se il guadagno totale scudi 1000 è venuto dal capitale 3400; il guadagno di *A* scudi 400 da qual capitale sarà venuto? che è l'intavolazione da noi usata nel suddetto Quesito XI.

2. Se il guadagno di *A* 400 è venuto dal capitale 1000, il guadagno totale 1000 da qual capitale sarà venuto?

3. Se il capitale intero 3400 ha guadagnato 1000; il cap. di *A* 1000 quanto avrà guadagnato?

4. Se il cap. di *A* 1000 ha guadagnato 400; quanto avrà guadagnato l'intero cap. 3400?

Ma quì osservisi, che nella 1. di queste intavolazioni il primo termine (pel quale dee farsi la divisione del prodotto degli altri due) è il dato guadagno totale scudi 1000, nella 2. è parimente il dato guadagno di *A* scudi 400, laddove nella 3. è la supposta somma totale 3400, e nella 4 è il supposto capitale di *A* scudi 1000.

Or di quì è, che nelle due prime intavolazioni, dovendosi far la divisione pei numeri dati, non pei supposti, la soluzione riesce giustissima; nelle altre due dovendosi la divisione fare pei numeri supposti, la soluzione riesce falsa.

Diffatti nella 1. Intavolazione il quarto termine darà per capitale di *A* scudi 1360, quando doveva dar 1000 secondo il supposto, e s'avrà l'errore di 360 in *più*. Quindi facendo una seconda posizione, col finge-

gere che il capitale di *A* sia 2000, quello di *B* 3400, la somma totale 5400, e dicendo: se il guadagno totale 1000 viene dalla somma totale 5400; il guadagno di *A* 400 da qual capitale verrà? Il quarto termine anche quì, invece di 2000, darà 2160, e s'avrà un altro errore di 160 in *più*. Terminata adunque l'operazione, il vero capitale di *A* si troverà sc. 2800, e per conseguenza quello di *B* 4200, la somma totale 7000; e fatta la pruova, si vedrà realmente, che se il guadagno totale 1000 è venuto dalla somma totale 7000, il guadagno di *A* 400 dovea venire dal capitale 2800.

Nella 2. Intavolazione, ritenuti gli stessi supposti di sc. 1000 pel capitale di *A* nella prima posizione, e 2060 nella seconda; dalla 1. posizione s'avrà l'errore di 900 in *meno*, dalla 2. quello di 400 pure in *meno*; e terminata l'operazione il vero capitale di *A* risulterà, come sopra, a sc. 2800.

Nella 3. Intavolazione, dalla 1. posizione si avrà l'errore di sc. 105 $\frac{1}{17}$ in *meno*, e dalla 2 posizione l'errore di sc. 29 $\frac{17}{27}$ pure in *meno*, e finita l'operazione, il capitale di *A* risulterà a sc. 2388 $\frac{4}{7}$, che apertamente è falso.

Nella 4. Intavolazione, dalla 1. posizione s'avrà l'errore di 360 in *più*, dalla 2. posizione quello di 80 parimente in più; e compiuta l'operazione il capitale di *A* dovrà essere sc. 2285 $\frac{5}{7}$, che pure è falso palesemente.

SE-

SEZIONE VIII.

Delle progressioni Aritmetiche.

LA progressione aritmetica è una serie di numeri che vanno sempre crescendo, o sempre vengono diminuendo colla medesima differenza dall' uno all'altro.

Nel primo caso la progressione si chiama *ascendente*, come 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ec.

Nel secondo caso si chiama *discendente*, come 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1.

I numeri che compongono la progressione o ascendente o discendente si chiamano i *termini* della progressione. Così nella progressione ascendente sopraindicata 1 è il primo termine, 3 il secondo termine, 5 il terzo ec.

La differenza che passa fra un termine e l' altro si dice la sua *ragione aritmetica*, e il numero esprimente questa ragione o differenza si chiama *l' esponente della ragione*. Così nei due accennati esempi l' esponente è 2, tale essendo la differenza fra un termine, e l' altro.

Questo esponente può esser 1, come nella progressione, che dicesi *naturale*, 1, 2, 3, 4, 5, ec.; o 2, come negli esempi surriferiti; o 3, come in questa 1, 4, 7, 10, 13, ec.; o qualsivoglia altro numero.

Si-

Similmente la progressione ascendente invece di cominciare dall' unità, può cominciare da qualunque numero, come 4, 6, 8, 10, 12 ec. e la discendente invece di terminare all' unità può terminare a qualunque numero, come 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5,

CAPO I.

Principj fondamentali.

Già abbiamo detto Part. II. p. 32, che quattro termini sono in proporzione aritmetica, quando la differenza fra il primo e il secondo è uguale alla differenza fra il terzo e il quarto: tali sono 3, 5, 7, 9.

Abbiamo pure aggiunto ivi pag. 33. che se il secondo e il terzo termine sono eguali, la proporzione si chiama *continua*: tali sono 3, 5: 5, 7.

Finalmente abbiamo detto, che in ogni proporzione aritmetica la somma dei due termini estremi è uguale a quella dei due medj; così 3 più 9 è uguale a 5 più 7: e per conseguenza nella proporzione aritmetica continua la somma dei due estremi è uguale al termine medio preso due volte; così 3 più 7 è uguale a 5 più 5.

Ora una progressione aritmetica non è altro che una proporzione aritmetica continua prolungata collo stesso ordine, e colla stessa differenza sino a quel numero di termini che più aggrada: così dalla proporzione continua 3, 5, 7 si formerà la progressione 3, 5, 7, 9, 11, 13, ec.

Per-

Perciò data qualunque progressione aritmetica, 1. se il numero de' termini è pari, la somma del primo ed ultimo termine è uguale alla somma dei due medj. Così nella progressione precedente 3, 5, 7, 9, 11, 13 la somma di 3 più 13 è uguale a quella di 7 più 9, perchè abbiamo in tal caso la proporzione *discreta*, o separata 3, 7, 9, 13.

2. Se il numero de' termini è dispari, la somma del primo ed ultimo termine è uguale al termine medio preso due volte. Così nella progressione 3, 5, 7, 9, 11, la somma di 3 più 11 è uguale al doppio di 7; perchè in tal caso abbiamo la proporzione *continua* 3, 7, 7, 9. Dal che pur viene, che per trovare il termine medio basta dividere per metà la somma del primo ed ultimo termine: così la somma di 3 più 11 divisa per mezzo dà 7.

3. In qualunque progressione o pari o dispari, la somma di due termini qualunque equidistanti dal primo, e dall' ultimo sarà eguale a quella di due altri parimente dal primo e dall' ultimo equidistanti; così nella progressione pari 3, 5, 7, 9, 11, 13 la somma di 5 più 11 è uguale a quella di 7 più 9, e nella progressione dispari 3, 5, 7 9, 11, 13, 15 la somma di 5 più 13 è uguale a quella di 7 più 11.

Premessi questi principj, in ogni progressione aritmetica cinque cose specialmente possono ricercarsi, cioè il primo o l' ultimo termine, il numero de' termini, la lo-

loro somma e la lor differenza; e conosciute tre di queste cose, può sempre ritrovarsi qualunque delle altre due.

Nei seguenti Capi noi ne daremo le regole, e gli esempi, valendoci sempre per maggior chiarezza della medesima progressione 3, 5, 7, 9, 11, 13.

Anzi per servire vie meglio alla brevità chiameremo sempre

Il primo termine - - -	*P*
L' ultimo - - - -	*U*
La differenza - - -	*D*
Il numero de' termini - -	*N*
La loro somma - - -	*S*

E perchè veggasi ad un tratto ciò che si deve operare, ne darem prima la formola alla maniera algebraica, soggiugnendone appresso la spiegazione.

CAPO II.

Trovare la somma de' Termini.

QUESITO I. *Dato* P, U, N *trovar* S.

Quì la formola è $S = (P + U) \times \frac{N}{2}$;

vale a dire la somma dei termini è uguale alla somma del primo ed ultimo termine moltiplicata per la metà del numero dei termini. Laonde per trovare la somma dei termini, si sommino prima fra loro *P* ed *U*, cioè il primo e l' ultimo termine; poi la

la lor somma si moltiplichi per $\frac{N}{2}$ cioè per la metà del numero de' termini; e il prodotto darà la somma ricercata. Così nella progressione 3, 5, 7, 9, 11, 13 sommando il primo e l'ultimo termine avremo 16, e moltiplicando questo per la metà del numero dei termini, cioè per 3, avremo 48 eguale alla somma di tutti i termini.

Quesito II. *Dato* P, D, N *trovar* S.

La formola è $S = (2P + DN - D) \times \frac{N}{2}$, vale a dire si prenda il doppio di P, cioè del primo termine; a questo s'aggiunga *DN*, cioè il prodotto della differenza moltiplicata pel numero dei termini, dalla lor somma si levi *D*, cioè la differenza; quello che resta si moltiplichi per $\frac{N}{2}$, cioè per la metà del numero de' termini; e il prodotto darà la somma che si ricerca. Così nella succennata Progressione si raddoppi il primo termine 3, e avrem 6; vi si aggiunga il 12 (prodotto della differenza nel numero de'termini), e avremo 18; se ne levi la differenza 2, resteran 16; si moltiplichi il 16 per la metà del numero dei termini, cioè per 3, e avremo 48, come sopra.

Quesito III. *dato* U, D, N *trovar* S.

La formola è $S = (2U + D - DN) \times$

$\times \frac{N}{2}$, vale a dire si raddoppi l'U; vi si aggiunga D; dalla lor somma si lievi DN; quel che resta si moltiplichi per $\frac{N}{2}$; e si avrà la somma che si desidera. Così nella medesima progressione raddoppiando l' ultimo termine 13, avremo 26; aggiugnendovi la differenza 2, avremo 28; levandone 12 (prodotto della differenza nel numero de' termini), resteran 16; e moltiplicando come sopra il 16 per 3, avrem 48.

QUESITO IV. *Dato* P, U, D *trovar* S.

La formola è $S = \frac{(U+D-P)\times(P+U)}{2D}$; vale a dire si sommino U e D; dalla lor somma si levi P; quel che resta si moltiplichi per la somma di P ed U; e il prodotto si divida per 2 D. Così nella stessa progressione si sommi l'ultimo termine 13 colla differenza 2, e avrem 15; se ne levi il primo termine 2, resteran 12; si moltiplichi il 12 per la somma del primo ed ultimo termine, cioè per 16, avremo 192; si divida questo prodotto pel doppio della differenza, cioè per 4, e avrem 48 come sopra.

CA-

CAPO III.

Trovare il numero dei termini.

QUESITO I. *Dato* P, U, D *trovar* N.

La formola è $N = \frac{U - P + D}{D}$. Quindi si sottragga *P* da *U*; al residuo si aggiunga *D*, e si divida il risultato per *D*. Così nella detta progressione sottraendo 3 da 13 avrem 10; aggiungendovi la differenza 2 avrem 12, e dividendo questo per la stessa differenza 2, avremo 6 eguale al numero dei termini.

QUESITO II. *Dato* P, U, S *trovar* N.

La formola è $N = \frac{2S}{P + U}$. Perciò si prenda il doppio di *S*, e si divida per *P* più *U*. Così raddoppiando il 48 avremo 96, e dividendo questo per 3 più 13, ossia per 16 avremo 6 come sopra.

CAPO IV.

Trovare l'ultimo termine.

QUESITO I. *Dato* P, N, S, *trovar* U.

La formola è $U = \frac{2S - PN}{N}$; ovvero $= \frac{2S}{N} - P$.

Laonde si prenda il doppio di *S*; questo si divida per *N*; e dal quoto si sottragga *P*. Così raddoppiando la somma 48 avremo 96; dividendo questo per 6 avremo 16;

16; e sottraendone 3 avrem 13 esprimente l'ultimo termine.

Quesito II. *Dato* P, D, N *trovar* U.

La formola è $U = P + D \times (N - 1)$. Perciò da *N* si sottragga 1.; il residuo si moltiplichi per *D*; e al prodotto s'aggiunga *P*. Così da 6 levando 1 avrem 5; che moltiplicato per 2 darà 10; e aggiugnendovi 3 avrem 13 come sopra.

AVVERTIMENTO. Con questa medesima regola si può trovare qualunque termine. Sia per esempio da trovarsi il quinto termine d'una progressione, che cominci per 3, e che abbia 2 per esponente della differenza: sottraendo 1 da 5, che è quì il numero dei termini, avrem 4; moltiplicando questo per la differenza 2 avrem 8, e aggiugnendovi il primo termine 3, il quinto termine sarà 11.

CAPO V.

Trovare il primo termine.

Quesito I. *Dato* N, D, U *trovar* P.

La formola è $P = U - D \times (N - 1)$ Perciò da *N* si sottragga 1; il residuo si moltiplichi per *D*, e il prodotto si sottragga da *U*. Così levando 1 da 6 avrem 5, che moltiplicato per 2 darà 10; e questo sottratto da 13 darà 3 eguale al primo termine.

Quesito II. *Dato* N, U, S *trovar* P.

La formola è $P = \frac{2S - NU}{N}$, o $P = \frac{2S}{N} - U$.

Laon-

Laonde si prenda il doppio di *S*; questo si divida per *M*, e dal quoto si sottragga *U*. Così raddoppiando 48 avremo 96; questo diviso per 6 darà 16; e sottraendone 13 avremo 3 come sopra.

CAPO VI.

Trovare la differenza.

QUESITO I. *Dato* P, U, N *trovar* D.

La formola è $D = \frac{U - P}{N - 1}$.

Quindi sottraggasi *P* da *U*, e il residuo si divida per *N* meno 1. Così sottraendo 3 da 13 avremo 10, e dividendo questo per 6 meno 1, ossia per 5, avrem 2 eguale alla differenza cercata.

QUESITO II. *Dato* P, U, S *trovar* D.

La formola è $D = \frac{(U+P)\times(U-P)}{2S-(U+P)}$. Laonde si moltiplichi *U* più *P* per *U* meno *P*; e il prodotto si divida per 2 *S* meno la somma di *U* più *P*. Così moltiplicando 13 più 3, ossia 18 per 13 meno 3, ossia per 10, avremo 160, e dividendo questo per 96 meno 16, ossia per 80, avrem 2 come sopra.

Riflessione sopra le Regole precedenti.

LE ragioni di queste regole dagli Algebristi si dimostrano facilmente. Poichè stabili-

bilite le due equazioni: $S = (P + U) \times \frac{N}{2}$

$U = P + D \times (N - 1)$

la prima delle quali è la stessa di cui abbiamo fatto uso per trovare la somma de' termini nel Quesito I, e la seconda è quella di cui ci siamo serviti per trovare l'ultimo termine nel Quesito II, tutte le altre si cavano per mezzo di varie sostituzioni da queste due.

Noi in siffatta dimostrazione non entreremo, perchè difficilmente potrebbe intendersi da chi non ha i principj dell' Algebra, e ci contenteremo di aver mostrata l'esattezza delle Regole colle applicazioni che ne abbiam fatto di mano in mano ai proposti esempi.

Varie altre formole cavano pur gli Algebristi dalle suddette equazioni, per trovase con altri dati il numero dei termini, l'ultimo termine, il primo termine, e la differenza. Ma esse involgono o quantità, o equazioni del secondo grado, che a questi elementi non appartengono.

Invece adunque, perchè meglio veggasi l'uso pratico di queste regole delle Progressioni Aritmetiche, n'aggiungeremo quì alcuni Quesiti.

CAPO VII.

Quesiti pratici di progressioni aritmetiche.

QUesito I. " Per un anno continuo *A* paga il primo giorno soldo 1, il secondo

ss. 2, il serzo ss. 3 ec. *B* paga il primo giorno ss. 1, il secondo ss. 3, il terzo ss. 5 ec. *C* paga il primo giorno ss. 6, il secondo ss. 10, il terzo ss. 14 ec. Domandasi quando avrà pagato ciascuno alla fine dell' anno, e quanto tutti e tre insieme "?

Quì trattasi in tutte e tre le progressioni di trovar la somma dei termini, essendo dato il primo termine, la differenza, e il numero de' termini. Si dovrà dunque operare come nel Quesito II. del Capo II.

Per maggiore speditezza però rispetto ad *A* basterà al numero de' termini 365 aggiugnere il primo termini 1, che fa 366, e moltiplicare per la metà di questo, che è 183, lo stesso numero dei termini 365; il prodotto ss. 66795, ossia l. 3339, 15 darà la somma ricercata; poichè il moltiplicare 365 per 183 è lo stesso, come moltiplicare, secondo la regola del succennato Quesito 2 $P+DN-D$ per $\frac{N}{2}$. E così si procederà in qualunque progressione naturale, che incominci dall' unità.

Rispetto a *B* basterà moltiplicare il numero dei termini 365 in se stesso, e il prodotto ss. 133225, ossia l. 6661, 5 darà pur la somma che si ricerca, essendo anche quì la medesima cosa il moltiplicare 365 in se stesso, come il moltiplicare secondo la succennata regola $2P \times DN - D$ per $\frac{N}{2}$. E così

si si opererà in ogni progressione ascendente, che incominci dall'unità, ed abbia 2 per esponente della differenza,

Rispetto a C secondo la regola del succennato Quesito II. si raddoppi il primo termine 6, e avrem 12, a questo si aggiunga il prodotto della differenza 4 nel numero de' termini 635 (che dà 1640), e avremo 1742; se ne levi la differenza 4, e resteranno 1468; questo finalmente si moltiplichi per la metà di 365, ossia per $182\frac{1}{2}$; e il prodotto ss. 26 910, ossia lir. 13395 10 darà la somma desiderata.

Unendo poi le tre somme *A*, *B*, *C*, avremo in tutto lir. 23396 10.

QUESITO II. *S'incamminano nello stesso tempo da un medesimo luogo due persone verso alla medesima parte? A fa miglia 16 ogni giorno, B ne fa 1 il primo giorno, 2 il secondo, 3 il terzo, e così di seguito. Domandasi in quanti giorni B raggiugne A?*

Quì si raddoppi il numero 16 delle miglia di *A* che dà 32, e si sottragga il primo termine di *B* ch'è 1; il residuo 31 indicherà dopo quanti giorni *A* sarà raggiunto da *B*.

La ragione si è che quì trattasi di trovare nella progressione di *B* il numero de' termini, ma non è dato che il primo termine, e la differenza, e manca l'ultimo termine per operare secondo il Quesito I. del Capo III.

Quest'ultimo termine però si ricava dalle miglia, che *A* fa ogni giorno. Poichè

giugnendo al residuo 30 la differenza 2, per cui s' avrebbero 32, e dividendo questo risultato per la stessa differenza 2, che darebbe 16 pel numero ricercato. Infatti tanto *A*, come *B* in 16 giorni faranno miglia 256.

Se *A* facesse 20 miglia ogni giorni, e *B* ne facesse 4. 7, 10 ec., l' ultimo termine sarebbe 40 meno il primo termine 4, cioè 36, e da questo sottraendo nuovamente il primo termine, poi al residuo 32 aggiungendo la differenza 5. e dividendo il risultato 35 per la stessa differenza 3, il quoto $11\frac{2}{3}$ darebbe il ricercato numero de' giorni.

AVVERTIMENTO I. Si noti però, che un tal quoto non dà quì il tempo preciso, in cui i due viaggiatori si uniranno, ma il dà soltanto per approssimazione. Diffatti *A* in giorni $11\frac{2}{3}$ farà miglia $233\frac{1}{3}$, e *B* in giorni 11 farà miglia 209; e siccome nel giorno dodicesimo farebbe 37 miglia, così in $\frac{2}{3}$ di questo giorno farà miglia $24\frac{2}{3}$, che unite alle precedenti 209 daranno miglia $233\frac{2}{3}$; sicchè *B* in giorni $11\frac{2}{3}$ non solo avrà raggiunto *A*, ma l' avrà oltrepassato di un terzo di miglio.

La ragione, per cui la soluzione qui non riesce esatta, si è, che abbiam di sopra supposto, che l' ultimo termine della progressione di *B* sia 36, quando realmente per 11 giorni è 34, e per 12 è 37.

Volendo adunque trovare il preciso momento, in cui *A*, e *B* si uniranno, conviene dopo aver trovato il numero de' gior-

ni 11 far un' altra operazione. Si veggà prima quante miglia farebbe *A* in giorni 11, che saranno 220, e quante ne farebbe *B*, che operando secondo il Quesito I. del Capo II. saranno 209. Dovrà dunque *B* nel giorno dodicesimo far 11 miglia di più che *A* per raggiugnerlo. Or siccome *B* in tutto quel giorno ne fa 20, e *B* 37, cioè 17 di più, così si dica: Se 17 miglia di più da *B* si fanno in ore 23 (supponendo che amendue viaggino giorno, e notte); 11 miglia di più in quante ore da lui si faranno? E il quarto termine sarà ore $15\frac{9}{17}$. Il preciso momento pertanto, in cui s' uniranno *A*, e *B*, sarà dopo giorni 11, ore $15\frac{9}{17}$. Se invece di supporre che amendue viaggino per 24 ore ogni giorno, si supporrà che viaggino a cagion d' esempio per sole 12, il momento dell' incontro sarà dopo giorni 11 ore $7\frac{3}{17}$. La regola però sarà sempre la stessa in qualunque suppoſizione.

E così si farà ogni volta, che il ricercato numero de' termini non si trovi eſſere un numero intero, ma accompagnato da qualche frazione.

AVVERTIMENTO II. La soluzione del presente quesito può adattarsi a varj altri di diversa specie, come se si domandaſſe in quanto tempo si caverà da due pozzi la stessa quantità d' acqua, se dal primo s' estraggono ogni ora 16 secchi, e dal secondo la prima ora 1 secchio la seconda 2, la terza 3 ec.; o la prima 2, la seconda 5, la terza 8 ec.; oppure si domandaſſe in quan-

quanto tempo due persone metteranno da parte lo stesso denaro, se *A* mette da parte ogni mese lir. 20, e' *B* ne mette il primo mese lir. 1, il secondo 2, il terzo 3 ec. o con qualunque altra progressione, o in quanto tempo pagheranno la stessa somma, se uno paga lir. 20 ogni giorno, il secondo nella progressione 1. 2. 3. ec. o 1. 3. 5. ec. s. 4. 8. 10. ec. ec.

QUESITO III. *Da una cassa comune due compagni hanno cavato l' uno lir. 666, l' altro lir. 702 precedendo con quest' ordine:* A *cavò il primo giorno lir. 6, il secondo 15, il terzo 25,* B *cavò il primo giorno l. 9, il secondo 18, il terzo 27, prendendo sempre lir. 3 più di* A, *Domandasi in quanti giorni abbiano estratto amendue le dette somme?*

Da lir. 702 sottragganſi le lir. 666, il residuo 36 si divida per 3; il quoto 12 darà il ricercato numero de' giorni.

La ragione è chiara per se medesima; poichè la differenza di lir. 36 nasce dall' aver *B* cavato lir. 3 di più ogni giorno. Dividendo adunque lir. 36 per 3 il quoto darà il numero de' giorni. Diffatti colle suddette progressioni si troverà, che in 12 giorni *A* cava lir. 666, e *B* lir. 702.

Quesito IV. *Una lepre inseguita da un cane si trova davanti a lui 24 de' propri passi: correndo fanno amendue in egual tempo egual numero di passi; ma con questa proporzione; che 5 passi del cane equivalgono a 8 passi della lepre. Domandasi in quante passi de' suoi il cane potrà raggiugner la lepre?*

Il cane ad ogni 5 passi supera di 3 passi la lepre. Si dica adunque: se per superare la lepre di 3 passi il cane ne dee far 5; per superarla di 24, cioè per raggiugnerla, quanti ne dovrà fare? e il quarto termine sarà 40.

Diffatti se 5 passi del cane equivalgono ad 8 della lepre, 40 del cane equivarranno a 64 della lepre, cioè ai 40 che la lepre fa nello stesso tempo, e ai 24 che avean di vantaggio.

Quesito V. " Uno prende a scavare un pozzo della profondità di piedi 30 per l. 260.; giunto a piedi 14 ei trova di non potere andar più oltre. Nasce quistione fra lui e il padrone sul pagamento, pretendendo quegli d'esser pagato a ragione della profondità scavata, e questi di pagarlo soltanto a ragione della fatica fatta, essendo gli 8 piedi che restano a cavarsi tanto più faticosi, quanto son più profondi. La lite vien decisa a favor del padrone, e si conviene di valutar la fatica dell'escavazione nella progressione naturale 1. 2. 3. ec. sicchè se pel primo piede la fatica è come 1, pel secondo sia come 2, pel terzo come 3 ec. Domandasi quanto pei 24 piedi dovrà pagarsi "?

Si cerchi prima la somma della progressione di piedi 30, la quale aggiugnendo al numero de' termini 30, il primo termine 1, e moltiplicando 31 per la metà di 30, cioè per 15 darà 465.

Indi si cerchi la somma della progressio-

ne

ne di piedi 24, la quale procedendo allo stesso modo darà 300.

Per ultimo si dica: Se per la somma 465 dovean pagarsi lir. 260; per la somma 300 quanto dovrà pagarsi? e il quarto termine sarà lir. 167. 14. 10 $\frac{30}{465}$.

QUESITO VI. " Due formiche distanti fra loro 2 pertiche muovonsi una verso l'altra con questa legge, che la prima fa $\frac{1}{3}$ di pertica al giorno, e torna indietro $\frac{1}{4}$ alla notte, la seconda s' avanza $\frac{1}{4}$ di pertica al giorno, e ritrocede $\frac{1}{3}$ alla notte. Domandasi in quanti giorni s' incontreranno "?

Le due formiche s' accostano ogni giorno per $\frac{1}{3}$ più $\frac{1}{8}$ di pertica, che sommati fanno $\frac{9}{8}$, ossia $\frac{1}{2}$, e si scostano ogni notte per $\frac{1}{4}$ più $\frac{1}{8}$, che sommati fanno $\frac{12}{32}$, ossia $\frac{3}{8}$. Sottraendo $\frac{3}{8}$ da $\frac{1}{2}$, ossia da $\frac{4}{8}$ resta $\frac{1}{8}$ che indica di quanto realmente s' accostino ogni giorno fra dì, e notte.

Ora per trovare in quanti giorni s' incontreranno, convien notare, che all' ultimo giorno dovendosi le formiche incontrare prima della notte, non debbono in quel dì valutarsi i $\frac{3}{8}$ di pertica, per cui alla notte sogliono retrocedere. Lo spazio adunque che avranno a scorrere per incontrarsi, sarà 2 pertiche meno $\frac{3}{8}$, cioè pertica 1 $\frac{5}{8}$.

Ciò posto si dica: se per accostarsi $\frac{1}{8}$ di pertica impiegano giorno 1; per accostarsi pertica 1 $\frac{5}{8}$ quanti ne impiegheranno? e il quarto termine sarà giorni 13.

Se al quarto termine fosse aggiunta qualche frazione, essa indicherebbe che le formi-

miche dovrebbono impiegar qualche parte anche del giorno seguente innanzi d'incontrarsi. E perchè vari Aritmetici, fra quali il *Figatelli*, hanno errato nel calcolar questa parte, così aggiugneremo il seguente Quesito per dimostrare in qual modo abbiasi realmente a computare.

QUESITO VII. " Due formiche, come sopra, distanti fra loro 2 pertiche si movono l'una verso dell'altra in modo, che la prima s'avanza $\frac{1}{3}$ di pertica il giorno, e ritrocede $\frac{1}{4}$ la notte, la seconda s'avanza $\frac{1}{5}$ il giorno, e ritrocede $\frac{1}{6}$ la notte. Domandasi quando s'incontreranno "?

Operando come sopra, si troverà che le formiche ogni giorno s'accostano per $\frac{1}{3}$ più $\frac{2}{5}$, ossia per $\frac{11}{15}$, e ogni notte si scostano per $\frac{1}{4}$ più $\frac{1}{6}$, ossia per $\frac{5}{12}$, e sottraendo $\frac{5}{12}$ da $\frac{8}{15}$, l'accostamento reale fra giorno, e notte sarà di $\frac{21}{180}$, ossia di $\frac{7}{60}$.

Sottraendo or come sopra dalla distanza di 2 pertiche lo scostamento di $\frac{5}{12}$, che per l'ultimo giorno non dee valutarsi, lo spazio che avranno a scorrere per incontrarsi, sarà pertica $1\frac{7}{12}$.

Dicendo adunque: se per avvicinarsi di $\frac{7}{60}$ impiegano giorno 1; per accostarsi di pertica $\frac{7}{12}$ quanti ne impiegheranno? il quarto termine sarà giorni $13\frac{4}{7}$.

Ora per trovare a qual parte del giorno quattordicesimo corrisponderanno $1\frac{4}{7}$, ossia qual sarà in esso il preciso momento, in cui le due formiche s'incontreranno, s'incominci a vedere di quanto sarannosi accosta-

state ne' giorni 13 precedenti fra dì e notte, dicendo: se in giorno 1 s'accostano di $\frac{7}{60}$ di pertica; in giorni 13 di quanto s'accosteranno? e il quarto termine sarà $\frac{91}{60}$; e poichè le 2 pertiche equivalgono $\frac{120}{60}$ saranno ancor distanti di $\frac{29}{60}$.

Per trovare presentemente in quanto tempo faranno tra tutte e due questi $\frac{29}{60}$, convien dire: Se $\frac{8}{15}$ da lor si fanno in giorno uno, senza computare lo notte, vale a dire in ore 12 (supponendo che camminino ore 12 al giorno); $\frac{29}{60}$ in quante ore si faranno? e il quarto termine sarà ora $10\frac{7}{8}$.

Il preciso momento dell'incontro sarà adunque nel giorno 14 a ore 10 $\frac{7}{8}$ dello stesso giorno.

Diffatti dicendo: se la prima formica in ore 12 fa $\frac{1}{3}$, ossia $\frac{20}{60}$ di pertica; in ore 10 $\frac{5}{8}$ quanto ne farà? il suo viaggio risulterà a $\frac{158}{60}$, e $\frac{1}{8}$ di un sessantesimo. Allo stesso modo quello della seconda risulterà a $\frac{105}{60}$, e $\frac{7}{8}$ di un sessantesimo; e fra tutte e due faranno appunto i $\frac{29}{60}$, che rimanevano.

Secondo il *Figatelli* l'incontro dovrebbe seguire nel giorno 14 a ore 20 $\frac{1}{4}$, il che è manifestamente falso, poichè non dovendosi giusta le condizioni del quesito nel viaggio diurno computare le ore della notte, in cui anzi le formiche ritrocedono, ciò porterebbe oltre al giorno 15: e il suo errore precede dall'aver egli detto: se $\frac{8}{15}$ si fanno in 1 giorno; in quanto tempo si faranno $\frac{29}{60}$?

quando dovea dire: Se $\frac{8}{10}$ si fanno in $\frac{1}{2}$ giorno, ossia in ore 12 ec.

QUESITO VIII. " Da due città distanti fra loro 500 miglia partono A, e B nello stesso tempo l'uno incontro all' altro, facendo A 20 miglia ogni giorno, e B 30 miglia. Domandasi in quanti giorni, e a quante miglia s' incontreranno?

Dopo i due precedenti quesiti questo sarà facilissimo a risolversi; poichè è chiaro che dell' intervallo frapposto fanno tra tutti e due 50 miglia ogni giorno; dicendo adunque: se 50 miglia da lor si fanno in giorno 1; 500 miglia in quanti dì si faranno? il quarto termine sarà giorni 10. E moltiplicando 10 per 20, e per 30 si troverà che A avrà fatto 200 miglia, e B 300.

Se la distanza delle due città fosse per esempio 530 miglia, il quarto termine allor sarebbe giorno 10 $\frac{3}{5}$; ma benchè v'abbia la frazione, non sarebbe tuttavia necessaria, per trovare il preciso momento dell' incontro, verun' altra operazione; non essendovi quì niun ritrocedimento alla notte. Infatti a ragione di 20 miglia per giorno A in giorni 10 $\frac{3}{5}$ farà 212 miglia, e B a ragione di 30 per giorno nello stesso tempo ne farà 318, in tutto 530 appunto.

SUP-

SUPPLEMENTO

SEZIONE I.

DELLE FRAZIONI O PARTE DECIMALI.

CAPO I.

Nozioni preliminari.

IN quella guisa che a forza di replicate moltiplicazioni per 10 si forma la serie sempre crescente 1, 10, 100, 1000, 10000 ec.; così all'incontro a forza di replicate divisioni per 10 si forma la serie sempre decrescente 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ ec.

Queste frazioni che vengono sempre diminuendosi nella progressione decimale, si chiamano perciò *Frazioni*, o *Parti decimali*. Affine però di evitare l'incomodo di scrivere queste parti decimali alla maniera dell'altre frazioni, e di facilitare al tempo stesso il modo di calcolarle, si è introdotto di scriverle alla maniera de' numeri intieri, con questa differenza, che laddove un numero intero ad ogni zero che gli si aggiunge alla destra, diventa dieci volte maggiore, come 1, 10, 100, 1000, 10000 ec.; all'incontro un numero decimale ad ogni zero che gli si aggiunge alla sinistra diventa dieci volte minore, sicchè 1 vale un decimo, 01 vale un centesimo, 001 vale un millesimo, 0001 vale un diecimillesimo, e così di seguito.

Allorchè un numero è composto d'interi, e di decimali, questi si separano dagl' interi per mezzo di una virgola. Così 34, 2 vuol dire 34 unità, e due decimi; 45, 23 vuol dire 45 unità, 2 decimi, e 3 centesimi; 10, 406 vuol dire 10 unità 4 decimi, niun centesimo, e 6 millesimi; 102, 0018 vuol dire 102 unità, niun decimo, niun centesimo, 1 millesimo, e 8 diecimillesimi.

Il terzo e il quarto esempio dimostrano, che siccome nei numeri interi, ove mancano o le unità, o le decine, ec. per conservare il valore degli altri numeri, nella classe mancante si scrive zero; così si fa parimente nei decimali, ove mancano i decimi, o i centesimi, ec., e se mancan gl' interi si scrive zero avanti la virgola, onde 0, 2 vuol dir 2 decimi.

Nel leggere i decimali si tiene pure la stessa regola come nel leggergl' interi. Perciò nel secondo esempio 45, 23 siccome il numero intero si proferisce quarantacinque unità, invece di dire quattro decine, e cinque unità; così il numero decimale si proferisce ventitre centesimi invece di dire due decimi, e tre centesimi. La ragione è pur la stessa e per gli uni e per gli altri; poichè siccome negli interi 4 decine equivalgono a quaranta, sicchè tanto è il dire quarantacinque unità, come il dire 4 decine, e 5 unità; così similmente nei decimali 2 decimi equivalgono a 20 centesimi, sicchè tanto è il dire 23 centesimi, come il dire 2 decimi, e 3 centesimi. Al-

Allo stesso modo nel terzo esempio 10, 406 si dirà 10 unità, e 406 millesimi; nel quarto esempio 102; 0018 si dirà 102 unità, e 18 diecimillesimi ec.

Di quì pur si raccoglie, che nei decimali l'aggiugnere degli zeri in fine alla destra non cambia punto il lor valore, perchè equivalendo allo stesso 2 decimi, e 20 centesimi, e 200 millesimi ec., tanto sarà lo scrivere per esempio 4, 2 come 4, 20, 04, 200 ec. Per brevità maggiore però gli zeri che sono in fine alla destra, nei decimali per ordinario si cancellano, e invece di scrivere 4, 200, si scrive a dirittura 4, 2.

Si possono anche nel leggere i numeri composti d'interi, e di decimali unir gli uni cogli altri, pronunziandoli congiuntamente. Così nel primo esempio 34, 2 invece di dire 34 unità e 2 decimi, può dirsi trecento quarantadue decimi; giacchè 40 decimi sono lo stesso, come 4 unità, e 300 decimi sono pure lo stesso come 30 unità. Allo stesso modo il secondo esempio 45, 23 potrà proferirsi 4523 centesimi, il terzo 10, 416 potrà leggersi 10406 millesimi, il quarto 102, 0018 si potrà dire 1010018 diecimillesimi ec.

CAPO II.

Del modo di ridurre qualunque frazione a parti decimali.

L'Uso dei numeri decimali è comodissimo per evitare il laborioso calcolo delle frazioni

ni, operandosi, come vedremo, sui decimali alla stessa maniera, con cui si opera sugli interi.

Ma a ciò è necessario di poter prima ridurre le altre frazioni a numeri decimali.

La riduzione però di qualunque frazione a numeri decimali è facilissima.

ESEMPIO I. Sia da ridursi a decimali la frazione $\frac{4}{5}$. Basta aggiugnere al numeratore uno zero, per cui diverrà 40, e dividere questo pel denominatore 5, e avrem per quoto 8 decimi eguali a $\frac{4}{5}$.

ESEMPIO II. Sia la frazione $\frac{10}{25}$. Aggiugnendo come sopra uno zero al numeratore avremo 100, che diviso per 25 darà 4 decimi eguali a $\frac{10}{25}$ (giacchè schizzando questa frazione per 5 ne vengono $\frac{2}{5}$, che sono appunto eguali a 4 decimi.

In vece d'un solo zero converrà molte volte aggiugnerne due, o più per rendere il numeratore divisibile del suo denominatore. In tal caso se vi si aggiungono due zeri il quoto esprimerà pei centesimi, se tre, esprimerà dei millesimi, e così di seguito.

ESEMPIO III. Sia la frazione $\frac{14}{50}$. Aggiugnendovi un solo zero il numeratore diverrebbe 40, che per 50 non è divisibile. Vi si aggiunga adunque un altro zero, e avrem 400, che diviso per 50 darà 8 centesimi eguali a $\frac{8}{100}$.

ESEMPIO IV. Sia la frazione $\frac{3}{500}$. Aggiugnendo uno zero abbiam 30, aggiugnendone due abbiam 300, che per 500 non si può

può ancora dividere: con un terzo zero avremo 3000, che diviso per 500 darà 6 millesimi eguali a $\frac{3}{500}$.

Non però sempre dalla prima divisione si ottiene un quoto esatto, e senza residuo.

ESEMPIO V. Data a cagion d'esempio la frazione $\frac{3}{8}$, aggiugnendo uno zero al numeratore avremo 30, che diviso per 8 darà 3 decimi con 6 di residuo. In questo caso si aggiunga un altro zero al residuo, che diverrà 60, e continuando la divisione per 8 avremo 7 centesimi da aggiugnersi al quoto. Quì pure abbiamo 4 d'avanzo: anche a questo pertanto aggiungasi un altro zero, e avremo 40, che diviso per 8 darà 5 millesimi da accrescersi al quoto, senza altro residuo. La frazione adunque $\frac{3}{8}$ equivarrà a 3 decimi, 7 centesimi, e 5 millesimi, ossia a 375 millesimi.

Alcune volte però per quanto si continuin le divisioni, avanza sempre qualche residuo, il che indica non esservi niun numero decimale che esattamente equivalga alla proposta frazione.

ESEMPIO IV. Sia data la frazione $\frac{1}{7}$. Aggiungendo al numeratore uno zero avrem 10, che diviso per 7 darà per quoto 1 decimo e 3 di residuo: aggiugnendo a questo un altro zero avrem 30, che pur diviso per 7 darà 4 centesimi per quoto, e 2 di residuo; con un altro zero questo diverrà 20, che diviso per 7 darà per quoto 2 millesimi, e 6 di residuo; con un altro zero avremo 60; che diviso per 7 darà 8 dieci-

mil-

millesimi per quoto, e 4 di residuo: questo pure accresciuto d' un altro zero farà 40, che diviso per 7 darà 5 centomillesimi per quoto con 5 di residuo; coll' aggiunta di un altro zero avrem 50, che diviso per 7 darà 7 milionesimi per quoto, e 1 di residuo. Continuando ad aggiungner zeri, e a dividere per 7, avrem di nuovo la serie stessa di quoti 1, 4, 2, 8, 5, 7, e la serie medesima di residui 3, 2, 6, 4, 5, 1; e così in infinito

Sebbene però in questi casi non possa trovarsi niun numero decimale, che esattamente equivalga alla frazione proposta, sarà tuttavia in nostra libertà il trovarne uno, la cui differenza dal vero sia minore di un milionesimo, di un bilionesimo, o di qualunque altra parte decimale di minor conto. Così la differenza che passa tra la proposta frazione $\frac{1}{7}$, e i decimali trovati 142857 milionesimi è minor di un milionesimo: quantità, che certamente nei conti ordinarj con piena sicurezza può trascurarsi.

CAPO III.

Del modo di sommare, sottrarre, moltiplicare, e dividere le parti decimali.

TUtte le operazioni aritmetiche si eseguiscono sopra a' numeri decimali nella stesse guisa, e colle regole stesse come su' numeri interi. Non resta quì adunque che proporre alcuni esempj di ciascuna operazione,

nr, perchè la cosa meglio apparisca dal fatto.

Articolo I.
Sommare i decimali.

Perchè le regole dell' addizione rilevinsi tutte da un solo esempio, stan proposti da sommarsi insieme più numeri parte interi, parte decimali, e parte misti d' interi e decimali, come si vede quì accanto.

Scritti l' un sotto all' altro e gli interi e i decimali, ciascuno nella lor classe, incomincia dalla destra, come si usa coi numeri interi, e fatta l' operazione come se tutti realmente fossero interi, per somma totale si avrà 1120, 2600.

34,
142,74
65,3016
328,0014
550,053
0,174
1120,2600

Quì resta solo a notare in 1. luogo, che nel primo, secondo, quinto, e sesto numero è indifferente o aggiugnere i zeri nel luogo dei decimali che mancano, scrivendo 34, 0000, 142, 7400, 550, 0430; 0, 1740; oppur tralasciarli, come noi abbiam fatto.

In 2. luogo, che la somma, per ciò che si è detto di sopra, può scriversi cancellando gli zeri in fine, e lasciandovi solamente 1120, 26.

Articolo II.
Sottrarre i decimali.

La sottrazione nei decimali si fa pure allo stesso modo, come nei numeri interi.

Sia

Sia per esempio la succennata somma, da cui abbiasi a sottrarre il quarto numero. Operando come coi numeri interi, avrem per residuo 791, 2586

1120,	2600
328,	0014
792,	2586.

Sommandosi poi questo residuo col sottraendo, avrem di nuovo la proposta somma, il che servirà di pruova alla sottrazione.

Sommando nuovamente i numeri proposti di sopra, escluso il quarto, la somma risulterà eguale al residuo ora trovato 792, 2586, il che servirà di pruova all'addizione.

Articolo III.

Moltiplicare i decimali.

O Abbiasi a moltiplicare un numero intero per un decimale, o un decimale per un intero, o due decimali fra loro, o un numero misto d'interi e decimali per un altro similmente misto d'interi e decimali, la moltiplicazione si fa sempre come se fossero tutti numeri interi, colla sola avvertenza di separare poi nel prodotto con una virgola tante cifre alla destra, quanti decimali si contengono e nel moltiplicando, e nel moltiplicatore.

ESEMPIO I. Sia da moltiplicarsi 12 per 0, 4, vale a dire 12 unità per 4 decimi. Il prodotto sarà 48 decimi equivalente a 4 unità, e 8 decimi, che quindi si scriverà 4, 6.

ESEMPIO II. Sia invece da moltiplicarsi

si 0, 12 per 4, vale a dire 12 centesimi per 4 unità. Il prodotto sarà 48 centesimi, che quindi si scriverà 0, 48.

ESEMPIO III. Sia da moltiplicarsi 0, 8 per 0, 6, cioè 8 decimi per 6 decimi. Il prodotto anche quì sarà 48 centesimi, che si scriverà come sopra 0, 48.

ESEMPIO IV. Sia finalmente da moltiplicarsi 34, 02 per 3, 6, cioè 34 unità e 2 centesimi per 3 unità e 6 decimi, ossia 3402 centesimi per 36 decimi (p. 121).

Fatta l' operazione come qui accanto, il prodotto sarà 122472 millesimi, equivalente a 122 unità, e 472 millesimi, che quindi tagliando con una virgola le tre ultime cifre alla destra si scriverà 122, 472.

34, 02	
3, 6	
20412	
10206	
122, 472	

Articolo IV.
Dividere i decimali.

Quando abbiasi a dividere un decimale per un intero, la divisione si fa alla maniera dei numeri interi, ma il quoto che ne risulta è tutto di decimali dello stesso ordine del dividendo.

ESEMPIO I. Avendo a dividere 0, 45 ossia 45 centesimi per 3, il quoto sarà 0, 15 cioè 15 centesimi, e avendo similmente a dividere 0, 45 per 15, il quoto sarà 0, 03 cioè 3 centesimi.

Quando abbiasi a dividere un intero per un decimale, la divisione si farà pure allo stes-

stesso modo de' numeri interi; ma converrà prima ridurre il decimale a numero intero, dovendo sempre il divisore per sua natura esser numero intero; e ciò si otterrà moltiplicando colla solita regola e divisore e dividendo pel denominatore del decimale, ossia aggiugnendo tanti zeri alla destra del dividendo, quante sono le cifre del decimale, e togliendo a questo le virgola.

ESEMPIO II. Sia da dividersi 45 per 0, 15, vale a dire 45 unità per 15 centesimi. Se il divisore fosse espresso colla frazione $\frac{15}{100}$, per far la divisione converrebbe prima moltiplicare e il divisore e il dividendo per 100, col qual mezzo il divisore resterebbe 15, e il dividendo diventerebbe 4500. Or allo stesso modo al dividendo 45 s' accrescano tanti zeri, quante sono le cifre decimali del divisore, e a questo tolgasi il segno decimale, cioè la virgola; e avrem come sopra 4500 per dividendo, e 15 per divisore; e fatta la divisione, il quoto sarà 300, esprimente 300 unità intere; essendosi quì e divisore e dividendo ridotti a numeri interi.

ESEMPIO III. Se le 45 unità s' avesse-ro a dividere per 0, 03, ossia per 3 centesimi, converrebbe istessamente accrescere tanti zeri al dividendo, quante sono le cifre del divisore dopo la virgola, cioè due zeri, per cui diverrebbe come sopra 4500, e togliere al divisore ogni segno decimale, per cui resterebbe 3; e fatta la divisione

s' a-

s' avrebber per quoto 1500 unità intere.

Quando abbiasi a dividere un numero misto d'interi e decimali per un intero, l' operazione si fa come fossero tutti numeri interi, e dal quoto si separano alla destra tante cifre decimali, quante ne sono nel dividendo.

ESEMPIO IV. Sia da dividersi 35, 25 per 5. Ciò vorrà dire dividere 3525 centesimi per 5. Or fatta la divisione, il quoto sarà 705 centesimi, che però dovrà scriversi 7, 05.

Finalmente allorchè s' abbiano a dividere l' un per l' altro due numeri misti amendue d' interi e di decimali, converrà prima ridurre il divisore a numero intero, il che si otterrà col liberare interamente il divisore medesimo dal segno decimale, e liberarne pure corrispondentemente il dividendo.

Ma qui tre casi possono occorrere 1. che abbia maggior numero di cifre decimali il dividendo, che il divisore; 2 che ne abbiano amendue un numero eguale; 3. che il dividendo ne abbia minor numero che il divisore.

Ora nel 1. caso basterà nel dividendo trasportare la virgola verso alla destra per tante cifre quanti sono i decimali del divisore. Così se il dividendo fosse 122, 472, e il divisore 3, 6; quello diventerà 1224, 72, e questo 36.

Nel 2. caso basterà toglier la virgola e al dividendo e al divisore. Così se quello fosse 34, 27, e questo 2, 50; togliendo la vir-

virgola ad amendue il primo diventerà 3425, e il secondo 250.

Nel 3. caso non solo converrà liberare interamente il dividendo da ogni segno decimale, ma aggiugnervi ancor tanti zeri, di quanto le cifre decimali del divisore sopravanzano quelle del dividendo. Così se questo fosse 127, 5, e quello fosse 3, 406, il dividendo diventerà 127500, e il divisore 3406.

Così disposti e il dividendo e il divisore, non resta che far la divisione secondo le solite regole, segnando nel quoto tante cifre decimali, quante ne rimangono nel dividendo, il che può avvenire soltanto nel primo caso, e lasciando il quoto senza alcun segno decimale, se niun decimale è rimasto nel dividendo, come avviene negli altri due casi.

ESEMPIO V. Per darne un esempio suppongasi come nel primo caso, che il dividendo sia 122, 472, e il divisore 3, 6, i quali numeri abbiam quì scelto a preferenza d' ogni altro, perchè il primo è il prodotto che abbiamo avuto dalla moltiplicazione dell' Articolo precedente, il secondo n' è stato il moltiplicatore, sicchè la presente divisione servirà di pruova alla moltiplicazione suddetta, qualora per quoto se n' abbia, come s' avrà diffatti, il moltiplicando.

Operando adunque come si è detto di sopra, il dividendo diventerà 1224,72, e il divisore 36; e fatta la divisione secondo le solite regole avrem

1224, 72|36
144 34,02
000
72

per quoto 3402, che separando due cifre come due sono i decimali del dividendo, darà appunto 34, 02.

Occorre però sovente, che dalla divisione rimanga qualche risiduo. Volendo in tal caso avere un quoto, che sia esatto, o che almeno s'accosti di più al vero, non si ha che ad aggiungere uno o più zeri al detto residuo, e continuar la divisione finchè non resti più alcuno avanzo, o finchè questo avanzo sia ridotto a quantità così piccola che trascurare si possa con sicurezza. I numeri che usciranno da questa divisione continua saranno tanti decimali da aggiungnersi al quoto, quanti zeri si saranno accresciuti successivamente al residuo.

ESEMPIO VI. per esempio da dividersi, come nel 2. caso accennato di sopra, il numero 34, 27 per 2, 50. Levando, come ivi si è detto, la virgola da ambedue le parti, i numeri diventeranno 3427, e 250.

Facendone la divione, come qui accanto; il quote sarà 13 con 177 di residuo. Aggiugnendovi uno zero, questo diventerà 1770 decimi, e continuando la divisione avrem 7 decimi da aggiugnersi al quo-

3427|250
927 13,708
1670
2000
0000

to

tiplicato pel suo quadrato. Così il cubo di 2 è 2 moltiplicato per 4, ossia 8; e chiamasi *cubo*, perchè la solidità del cubo si ottiene appunto moltiplicando uno de' quadrati eguali che ne compongono la superficie per uno dei lati.

La quarta potenza, o il quadrato-quadrato di un numero è il prodotto del medesimo moltiplicato pel suo cubo. Così il quadrato-quadrato di 2 è 2 moltiplicato per 8, cioè 16; e si dice *quadrato quadrato*, perchè realmente è il quadrato del quadrato medesimo; che diffatti moltiplicando il quadrato 4 per 4, egualmente risulta 16.

In simil guisa la quinta potenza d' un numero si otterrà moltiplicandolo per la sua quarta potenza; la sesta moltiplicandolo per la quinta; e così successivamente.

Daremo quì per un saggio (di cui avremo puranche occasione di servirci in appresso) la Tavola delle prime quattro potenze de' numeri semplici.

Numeri semplici	Quadrati	Cubi	Quadrati quadrati
1	1	1	1
2	4	8	16
3	9	27	81
4	16	64	256
5	25	125	625
6	36	216	1296
7	49	343	2401
8	64	512	4096
9	81	729	6561

Nelle frazioni le diverse potenze si trovano similmente moltiplicando la frazione proposta tante volte per se medesima, quanto è il numero, o l' *esponente* della potenza, a cui si vuole arrivare.

Così il quadrato di $\frac{2}{3}$ è $\frac{4}{9}$, il cubo è $\frac{8}{27}$ ec. Così parimente la seconda potenza di $\frac{1}{2}$ è $\frac{1}{4}$; la terza $\frac{1}{8}$; la quarta $\frac{1}{16}$; la quinta $\frac{1}{32}$, o così seguitando: ove pure si osservi che se il numeratore della frazione è 1, basta allora moltiplicare soltanto il denominatore, giacchè 1 moltiplicato per se me-

medesimo qualunque numero di volte dà sempre 1 ; e perciò qualunque potenza dell'unità è sempre l'unità stessa .

CAPO II.

Delle radici .

LA radice di una potenza è quel numero che moltiplicato una o più volte per se medesimo produce la detta potenza ; e chiamasi *radice quadrata* quella che moltiplicata per se una volta produce il quadrato ; *cubica* quella che moltiplicata per se due volte produce il cubo ; e così delle altre . Per tal modo la radice quadrata di 4 è 2 , la radice quadrata di 9 è 3 : come pure lo stesso 2 è radice cubica di 8 , e il 3 è radica cubica di 27.

L'estrazione della radice è quella operazione , per cui dato un numero considerato come seconda , o terza , o qnarta potenza ec. , si cerca la sua radice ; e chiamasi *estrazione della radice quadrata* quella con cui si cerca la radice quadrata ; *estrazione della radice cubica* quella , con cui si cerca la cubica ec.

Noi tratteremo quì estesamente dell' estrazione delle due radici quadrata e cubica ; e un cenno bastante aggiugneremo pur anche rispetto alle altre .

Articolo I.

Estrazione della radice quadrata.

§. 1. *Estrazione della radice quadrata da numeri interi.*

L'Estrarre da un numero la radice quadrata non è altro, che trovare un numero, il quale moltiplicato per se medesimo o dia esattamente il numero proposto, se questo è un quadrato perfetto, o dia un numero prossimo, s'egli non è un quadrato perfetto.

La radice quadrata di 4 a cagion d'esempio si trova esattamente in numeri interi, perchè 2 per 2 esattamente dà 4. Ma la radice quadrata di 5 in numeri interi non può esattamente trovarsi, perchè 2 per 2 dà quattro, e 3 per 3 dà 9. In tal caso coi metodi d'approssimazione convien cercare di accostarsi più che si può alla vera radice; e di questi metodi noi parleremo dopo che avremo spiegato le regole con cui si estrae esattamente la radice quadrata dai numeri che son quadrati perfetti.

Se il dato numero non è composto che di una o due cifre, la sua radice quadrata non sarà che di una sola cifra, poichè il 9, che è il maggiore dei numeri semplici, moltiplicato per se medesimo, dà 81, e il 10, che è il minore dei numeri composti, per se medesimo moltiplicato dà 100, il quale non ha più due sole cifre, ma tre.

Da-

Dato pertanto un numero di una o due cifre, o egli è uno dei seguenti quadrati perfetti 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 63, 81, e la sua radice quadrata sarà esattamente dei seguenti numeri semplici 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; o egli è tutt'altro numero, e non essendo quadrato perfetto, la sua radice in numeri interi non potrà ritrovarsi esattamente; ma trovata in numeri interi la radice prossima, converrà per mezzo dei decimali cercare di accostarsi alla vera radice nel modo che accenneremo in appresso.

Se il dato numero è composto di tre o quattro cifre, la sua radice deve essere necessariamente di due; se è composto di 5 o 6 cifre, la radice deve essere necessariamente di 3; se è composto di 7 o 8, la radice necessariamente deve esser di 4; e così seguitando. Imperocchè il minor numero di 2 cifre, che è 10, moltiplicato per se stesso dà 100; il minor numero di 3 cifre che è 100 moltiplicato per se stesso dà 10000; e il minor numero di 4 cifre che è 1000, per se medesimo moltiplicato dà 1000000.

Or prima di spiegare come da un numero di 3 o 4 cifre abbia ad estrarsi la radice quadrata, conviene osservare in qual modo dalla moltiplicazione di un numero di 2 cifre per se medesimo si formi il suo quadrato; giacchè da questa formazione appunto si dedurrà facilmente la regola, con cui estrarne poi la radice.

Sia dato il numero 23, e si moltiplichi

colle solite regole per se medesimo. L'operazione si farà, come vedesi quì accanto.

Or osservisi, che in questa operazione si moltiplica prima il 3 per se stesso, poi il 3 per 2; indi nuovamente il 2 per 3; e finalmente il 2 per se stesso.

$$\begin{array}{r} 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$$

Da ciò appare primieramente che la somma 529 contiene incominciando dalla sinistra 1. il quadrato delle decine; 2. il prodotto delle decine moltiplicate due volte per le unità; 3 il quadrato delle unità.

Secondariamente da ciò si scorge che il quadrato delle decine è contenuto nella prima cifra a sinistra, cioè in quella che esprime le centinaja, e il rimanente nelle altre due.

ESEMPIO I. Ciò posto sia da estrarsi la radice quadrata da un numero di 3 cifre, per cui a maggior chiarezza prenderemo lo stesso numero 529 avuto di sopra.

1. Si scriva, come quì accanto il proposto numero, separando con una linea verticale le due ultime cifre alla destra.

$$\begin{array}{r|r} 5\,|\,29 & \underline{23} \\ \underline{4} & 43 \\ 12,9 & \underline{5} \\ & 129 \end{array}$$

2. Osservisi che il quadrato delle decine, per ciò che si è detto pocanzi, deve essere contenuto nel numero che rimane a sinistra, cioè nel 5. Or poichè questo non è un quadrato perfetto, cerchisi la radice del maggior quadrato in lui compreso, cioè del 4; e questa radice che è 2 (tirata accan-

to

to al proposto numero una linea verticale, ed una orizzontale) si scriva sopra alla linea orizzontale.

3. Si moltiplichi la radice 2 per se medesima, e il prodotto 4 si scriva sotto al primo membro del proposto numero, cioè al 5, e da lui si sottragga.

4. Si abbassi il secondo membro 29, e si unisca al residuo 1, per cui avremo 129.

5. In questo numero si contiene il doppio prodotto delle decine per l'unità, e il quadrato delle unità. Ora il doppio prodotto delle decine per le unità non può contenersi nell'ultima cifra alla destra esprimente le semplici unità. Questa adunque si separi con una virgola.

6. Le altre due cifre 12 saran quelle che conterranno il doppio prodotto delle decine per le unità. Si raddoppi adunque la trovata radice delle decine, cioè il 2, e il doppio di essa che è 4, si scriva sotto alla linea orizzontale; quindi si divida il numero 12 per questa doppia radice delle decine, cioè per 4; e il quoto 3 dovrà essere la radice delle unità.

7. Per vedere se tale sia diffatti, scrivasi il 3 alla destra del 4 sotto alla linea orizzontale, e il numero 43 che ne risulta si moltiplichi pel medesimo 3. Egli è chiaro che in questo modo la radice delle unità verrà a moltiplicarsi per se medesima, e pel doppio della radice delle decine, sicchè il prodotto conterrà il quadrato delle unità, più il doppio prodotto delle decine mol-

tiplicate per le unità. Qualora adunque il detto prodotto riesce eguale, com' è diffatti, al numero 129, che doveva contenere le stesse cose, ciò sarà indizio che il numero 3 è realmente la cercata radice delle unità; e scritta questa alla destra del 2 sopra la linea orizzontale, avrem 23 per radice totale del proposto numero 529; del che potremo assicurarci alla pruova, osservando se il 23 moltiplicato in se stesso dà realmente il numero 529.

8. Se il suddetto prodotto riuscisse maggiore del numero 529, ciò indicherebbe che la radice delle unità è minor di 3; se il prodotto riuscisse minore, indicherebbe che il proposto numero 529 non è un quadrato perfetto. Ma di tutto questo parleremo in appresso.

Or vediamo come possa estrarsi la radice quadrata da un numero di 4 cifre.

ESEMPIO II. Sia proposto il numero 1024. Questo è il prodotto di 32 moltiplicato in se stesso. Ma affinchè veggasi più chiaramente che l' estrazione della radice si fa anche quì esattamente colla medesima regola sopraccennata, osserviam prima come dalla moltiplicazione di 32 in se stesso nasca il suddetto numero 1024.

Dall' operazione posta quì accanto risulta 1. che anche quì la somma 1024 contiene il quadrato delle decine, il doppio prodotto delle decine nelle unità, e il quadrato delle unità; 2 che il quadrato delle decine è contenuto nelle prime due cifre 10.

32	
32	
64	
96	
1024	

Ciò

Ciò posto 1. si scriva il proposto numero separando con una lineetta verticale le due ultime cifra alla destra.

10|24	32
9	62
—	2
12,4	124

2. Si estragga dal primo membro 10 la radice prossima che è 3.

3. Si moltiplichi il 3 per se stesso, e il quadrato 9 si sottragga dal primo membro 10.

4. Al residuo 1 si aggiunga il secondo membro 24 che farà 124.

5. Separata con una virgola l'ultima cifra 4, le prime due cifre 12 si dividano pel doppio della radice 3, cioè per 6, e il quoto 2 si scriva a destra del medesimo 6.

6. Il numero 62, che ne risulta si moltiplichi pel quoto 2; e poichè il prodotto è 124, come sopra, il quoto 2 sarà realmente la seconda radice; e la radice totale del proposto numero 1024 sarà 32.

Collo stesso metodo si estrarrà la radice quadrata da qualunque numero composto di qualunque quantità di cifre, dividendo prima il dato numero di due in due cifre da destra a sinistra, e procedendo in seguito da sinistra a destra colle regole sopra indicate dall'uno all'altro membro.

ESEMPIO III. Sia proposto il numero 104329.

1. Dividasi questo numero in tre membri, come quì accanto.

10|43|29	323
0	62
—	2
14,3	
12,4	
—	

2. Si cerchi la radice prossima del primo membro 10. che è 3.

3. Si moltiplichi il 3 per se stesso, e il quadrato 9 si sottragga dal 10.

192,9 643
192,9
———
009,0

4. Al residuo 1 si aggiunga il secondo numero 43.

5. Separata con una virgola l' ultima cifra 3, le due prime 14 si dividano pel doppio della prima radice 3, cioè per 6, e il quoto 2 si scriva sopra alla linea orizzontale accanto al 3, e sotto alla medesima accanto al 6.

6. Si moltiplichi il numero 62, che ne risulta per la seconda radice 2, e il prodotto 124 si sottragga dal numero 143.

7. Al residuo 19 si unisca il terzo membro 29, e dal numero 1929, che ne deriva, si separi con una virgola l' ultima cifra 9.

8. Siccome il numero 32, che è sopra alla linea orizzontale esprime la quantità delle decine che entrano nella radice totale; così dividendo pel doppio di questo numero che è 64, le tre prime cifre del numero 1929, avremo la radice delle unità.

9. Dividasi infatti il numero 192 per 64, e il quoto 3 si scriva al luogo delle radici accanto al 32, e sotto si scriva accanto al 64.

10. Si moltiplichi il numero 643, che da questo risulta per l' ultima radice 3, ed essendo il prodotto eguale al suddetto numero 1929, ciò sarà indizio che il 3 è la vera radice delle unità, e che la radice totale del numero proposto è esattamente 323.

Finora abbiamo operato sopra a quadrati per-

perfetti ; e ciascuna radice si è presentata di mano in mano senza difficoltà. Or è da vedere ciò che far debbasi 1. quando la radice che si presenta al primo tratto, si riconosca alla pruova essere maggior del vero ; 2. quando nella radice entri alcun zero ; 3. quando dall'operazione rimanga qualche residuo, il quale per conseguenza dimostri che il proposto numero non è un quadrato perfetto, e che la radice trovata non è compiuta interamente.

Tutto questo noi mostreremo per maggior brevità in un solo esempio.

ESEMPIO IV. Sia dunque proposto il numero 2268896. Divise le cifre secondo il solito a due a due da destra a sinistra, avrem 4 membri.

Or 1. estraggasi dal primo membro 2 la radice prossima, che sarà 1, e il suo quadrato, che pure è 1, si sottragga dal 2.

2. Al residuo 1 si aggiunga il secondo membro, e le prime due cifre 12 si dividan pel doppio della prima radice, cioè per 2. Il quoto sarebbe 6 ; ma prima di scriverlo alla radice, gli si dia la pruo-

2|26|88|96	1506, 28
1	
12,6	25
12,5	5
18,89,6	3006
18,03,6	6
86,00,0	30122
60,24,4	2
25,75,60,0	3012,48
24,09,98,4	8
1,95,61,6	

va a parte. Si scriva dunque accanto al 2, e il 26, che ne risulta, si moltiplichi per 6. Il prodotto sarà 156, il quale essendo maggiore del numero 126, di cui avrebbe a sottrarsi, indicherà che la radice 6 è troppo grande, e conviene diminuirla. Si prenda pertanto il 5, e scritto questo invece del 6 accanto al 2, si moltiplichi il 15 per 5. Il prodotto sarà 125, il qual sottratto da 126 darà 1 di residuo, e indicherà che il 5 è il numero che dee scriversi alla radice.

3. Al residuo 1 s' unisca il terzo membro, e le prime due cifre 18 si dividan pel doppio della radice 15 finor trovata, cioè per 30. Si vedrà che questa divisione non può eseguirsi, essendo il 18 minor del 30, e perciò alla radice si scriva zero.

4. Al numero 188, che resta intatto, si aggiunga il quarto membro, e le prime quattro cifre 1889 si dividan pel doppio della radice 150 finor trovata, cioè per 300. Il quoto 6 si aggiunga al 300, e il numero 3006 che risulta si moltiplichi per 6. Il prodotto sarà 18036, che sottratto dal numero 18896 darà 860 di residuo, e indicherà che il 6 può scriversi alla radice.

5. La radice finor trovata sarà 1506; ma essendovi 860 di residuo, questo indicherà che la radice trovata non è perfetta. E diffatti moltiplicandola per se stessa avrem soltanto 2268036, e il proposto numero crescerà di 860. Nè varrebbe l' aggiugnere alla radice un' unità scrivendo 1507, poichè

que-

questa sarebbe maggior del vero ; e infatti moltiplicandola per se stessa darebbe 2271049. che supererebbe di 3013 il proposto numero. Da ciò rilevasi che la vera radice debb' essere fra il 1506, e il 1507. Ora a questa se non possiamo arrivare precisamente, possiamo però accostarci per mezzo dei decimali in maniera che la differenza dal vero sia minore di un decimo, o di un centesimo, o di un millesimo, o di quella quantità decimale che a noi più aggrada.

6. Adunque al residuo 860 si aggiungano prima due zeri, e avremo il numero 86000. Le prime quattro cifre di questo numero secondo il solito si dividan pel doppio della radice trovata 1505, cioè per 3012, e avrem per quoto 2 decimi da aggiugnersi alla radice. Per farne la pruova, si unisca il 2 al 3012, e avremo 30122, che moltiplicato per 2 darà 60214, il quale sottratto da 86000 darà per residuo 25756, e indicherà che il 2 può scriversi alla radice, ove però converrà premettervi il segno decimale, cioè la virgola.

7. Coll' operazione precedente sarem sicuri che la differenza fra la radice trovata 1506, 2, e la vera radice è minore di un decimo. Volendo che questa differenza diventi minore di un centesimo, al residuo 25756 si aggiungano due altri zeri, e dal numero 2575600 che ne risulta, separata secondo il solito l' ultima cifra, si divida il rimanente 257560 pel doppio della radice finor trovata 15062, cioè per 30124, e

avrem

avrem per quoto 8 centesimi da aggiugnersi alla radice. Per farne la pruova si unisca l' 8 al 30124, e il numero 301248, che ne proviene, si moltiplichi per 8; il prodotto sarà 2409984, che sottratto dal numero 2575600 dara per residuo 165616.

8. Se la differenza dalla vera radice si volesse minore d'un millesimo, o d'un diecimillesimo ec., non si avrebbe che a seguitare ad aggiugnere due zeri al residuo, e continuare di mano in mano l' estrazione, il che noi tralasciamo per non allungarci soverchiamente.

§. 2. *Estrazione della radice quadrata dalle parti decimali.*

DA' numeri decimali l' estrazione della radice quadrata si fa precisamente allo stesso modo, come da' numeri interi. Così nel I. Esempio se il numero dato in vece di 529 fosse o, 529 l' estrazione farebbesi nella stessa maniera, e la radice sarebbe, o, 23; nel II. Esempio parimente se il dato numero fosse o, 1024 l' estrazione si farebbe come sopra, e s' avrebbe la radice o, 32.

Nella stessa guisa similmente estraesi la radice da' numeri composti d' interi e di decimali; e anche quì le radici che escono dai membri di numeri interi, son numeri interi, quelle che escono dai membri di numeri decimali, son numeri decimali. Così nel III. Esempio se il dato numero fosse 1043, 29, la radice sarebbe 32, 3; nel IV. Esempio

se

se il numero dato fosse 22688, 96, avrebbesi la radice 150,6; e continuando dal residuo l'estrazione, come abbiam fatto, la radice sarebbe 150, 628.

Resta solo ad avvertire, che se il numero dei decimali uniti agl'interi fosse dispari, converrà aggiugnervi uno zero alla destra (il quale come abbiamo veduto a pag. 115 non cambia il valore dei decimali), perchè non riesca nel medesimo membro un decimale e un intero. Così se fosse proposto il numero 112, 5, coll'aggiugnervi uno zero diventerà 112, 50; ed estrattane la radice avremo 10; 6 con 14 di residuo, sul quale volendo, potrebbesi continuare l'estrazione a piacimento col metodo già indicato.

§. 3. *Estrazione della radice quadrata dalle frazioni.*

IL quadrato di una frazione si forma col moltiplicare per se stesso e il numeratore, e il denominatore. Così il quadrato di $\frac{2}{3}$ è $\frac{4}{9}$, il quadrato di $\frac{4}{5}$ è $\frac{16}{25}$.

Ora allo stesso modo la radice quadrata di una frazione si ottiene coll'estrarre questa radice separatamente e dal numeratore e dal denominatore. Così la radice di $\frac{4}{9}$ sarà $\frac{2}{3}$, la radice di $\frac{16}{25}$ sarà $\frac{4}{5}$.

Siccome però il denominatore è quello che costituisce il carattere della frazione; così è necessario che questa sia un quadrato perfetto, acciocchè il denominatore della ra-

radice sia anch' esso un numero intero e perfetto.

Quindi è, che quando il proposto denominatore non sia un perfetto quadrato, conviene renderlo tale col moltiplicarlo per se medesimo, e per esso poi moltiplicare ancora il numeratore, onde conservare alla frazione lo stesso valore. Così, se la frazione data fosse $\frac{2}{5}$, ove il denominatore 5 non è quadrato perfetto, si moltiplicherà per 5 e il numeratore il denominatore, e avremo invece $\frac{10}{25}$.

Ridotto a quadrato perfetto il denominatore, la sua radice s' avrà facilmente, e non resterà che cercar la radice del numeratore.

ESEMPIO I. Sia data infatti la frazione succennata $\frac{10}{25}$; la radice del denominatore sarà 5, la radice prossima del numeratore sarà 3 con 1 di residuo, e la radice totale sarà $\frac{3}{5}$.

Se la radice del numeratore vorrà aversi ancor più vicina al vero, basterà aggiugnere come quì accanto due zeri al residuo, e continuare l'estrazione, da cui verrà 1 decimo da aggiugnersi al 3, con 39 di residuo. Se si vorrà andar più innanzi, si aggiugneranno a questo residuo due zeri, e continuando l' estrazione si avranno altri 6 centesimi, con 144 di residuo, sul quale allo stesso modo si potrà continuare l' estrazione a piacimento.

10	3, 16	
9	6	1
100		1
61		
390,0		616
375,6		6
144		

Per radice della proposta frazione $\frac{1}{2}\frac{2}{5}$ noi abbiamo dunque trovato $\frac{3}{}$, $\frac{1}{5}\frac{6}{}$. Or se questa vorrà tutta ridursi ad espressione decimale, basterà dividere il numeratore pel denominatore, da cui verranno 0, 63 con 1 di residuo.

La maniera però più spedita, onde avere in numeri decimali la radice di una frazione, si è quella di convertire prima di tutto la frazione proposta in parti decimali, che abbiano il doppio delle cifre che aver si vogliono alla radice.

ESEMPIO II. Sia data per esempio la frazione medesima sopraccennata $\frac{2}{5}$, da cui vogliasi aver la radice in numeri decimali di due cifre, ossia in tanti centesimi. Si aggiungano quattro zeri al numeratore 2, che diventerà 20000. Questo si divida pel denominatore 5, che darà per quoto 4000. Si estragga da questo quoto colle solite regole la radice quadrata, e questa sarà appunto 0, 63 come sopra.

40[00	163
·36	
—	123
40,0	3
36,9	
—	
3,1	

Se invece di una semplice frazione sarà dato un numero misto d' interi e rotti, si ridurrà prima tutto a frazione, indi s' opererà come sopra.

ESEMPIO III. Così dato il numero 12 $\frac{1}{4}$, si ridurrà prima tutto alla frazione $\frac{5}{4}\frac{1}{5}$; indi qualor si vogliano per esempio due de-

ci-

cimali alla radice si aggiugneran quattro zeri al numeratore 51, che diventerà 51.0000 e diviso per 4 darà 12,7500. Finalmente da questo si estrarrà la radice che sarà 3, 57 con 51 di residuo, come si può vedere dell' operazione posta quì accanto.

12|75|00|;	57
9	
	65
37,5	5
32,5	
5,00,0	707
4,94,9	7
5,1	

Se dato un numero intero, il quale non sia un quadrato perfetto, vorrà aversi la sua radice a meno di una data unità frazionaria, si convertirà il numero intero in una frazione, la quale abbia per denominatore il quadrato del dato denominatore, e da questa frazione si estrarrà la radice.

ESEMPIO IV. Sia dato il numero 5, che non è quadrato perfetto, e sia da estrarsene la radice a meno $\frac{1}{13}$.

Facciasi il quadrato di 13, che è 169; per questo si moltiplichi, e si divida il 5, e avremo la frazione $\frac{845}{169}$; dalla quale estraendo la radice quadrata, avremo per essa la frazione $\frac{29}{13}$, o $1\frac{3}{13}$, la cui differenza dalla vera radice è minore di $\frac{1}{13}$.

§. 4. *Quesiti pratici per l' estrazione della radice quadrata.*

PEr dar qualche saggio de' casi in cui l' estrazione della radice quadrata può occorrere, aggiugneremo i due seguenti Quesiti.

QUESITO I. *Una truppa di 1225 soldati ha*

ha formato un battaglione quadrato. Domandasi di quante file era egli composto, e quanti soldati aveva per fila?

Le due domande riduconsi ad una sola, perchè in un battaglione quadrato le file debbono esser tanto, quanti i soldati per ogni fila.

S' estragga adunque dal numero 1215 la radice quadrata, e si troverà che 35 erano i soldati per ogni fila.

12|25 | 35
9 | 65

32,5 | 5
32,5

00,0

QUESITO II. *Uno ha 8112 piante, colle quali vorrebbe formare un bosco quadrato, mettendole a due braccia di distanza l' una dall' altra. Si cerca 1. quante ne dovrà mettere per ogni linea; 2. se le piante verranno tutte impiegate; 3. di qual grandezza riuscirà il bosco?*

I. e II. Parte. Dal numero 8112 estraggasi la radice quadrata, la quale sarà 90 con 12 di residuo. Questa indichierà che 90 saran le piante per ogni fila, e avanzeranno 12. piante.

81|12 | 90
81

00,12

III. Parte. Se le piante fossero 3 in ogni fila, e distanti 1 braccio l' una dall' altra, la lunghezza di ogni fila sarebbe braccia 3 meno 1, ossia braccia 2. Essendo 90 le piante in ogni fila, e braccia 2 la distanza dall' una all' altra, la lunghezza d' ogni fila riuscirà eguale a 90 meno 1, (ossia a 89) moltiplicato per 2 che dà 178. Facendo adun-

dunque il quadrato di 178, l'ampiezza del bosco riuscirà di 31684 braccia quadrate.

Articolo II.
Dell' estrazione della radice cubica.

§. 1. *Estrazione della radice cubica dai numeri interi.*

Qualora un numero non abbia più di tre cifre, la sua radice cubica sarà espressa da una sola cifra, vale a dire sarà un numero semplice; ove il numero arrivi alle quattro cifre, la sua radice cubica ne avrà due.

Poichè il cubo di 9, che è il maggiore tra i numeri semplici, non oltrepassa il numero 729; e il cubo di 10 che è il minore fra i numeri composti, arriva al 1000.

Quindi è che ove debbasi estrarre la radice cubica da un numero, il qual non abbia più di tre cifre, ella si ricaverà facilmente dalla Tavola posta a pag. 130, la qual darà o la radice esatta, se il proposto numero è un cubo perfetto, o darà la radice del maggior cubo in lui contenuto, qualora non sia un cubo perfetto. Così la radice esatta di 343 si vedrà esser 7, e la radice prossima di 560 si troverà esser 8.

Per veder ora in qual modo estrar si possa la radice cubica da un numero, il quale abbia più di tre cifre, radice per conseguenza, la quale ne debbe avere almen due, osserviamo primieramente, come abbiam fat-

fatto per la radice quadrata, in qual modo si formi il cubo di un numero di due cifre.

Abbiamo veduto a pag. 134 che il quadrato di un numero composto di decine e di unità, contiene il quadrato delle decine, più due volte il prodotto delle decine nelle unità, più il quadrato delle unità.

Ora primieramente moltiplicando queste tre quantità per le decine avremo

1. Il quadrato delle decine moltiplicato per le decine, ossia il cubo delle decine medesime.

2. Due volte il prodotto delle decine nelle unità moltiplicato nuovamente per le decine, che equivale a due volte il quadrato delle decine moltiplicato per le unità.

3. Il quadrato delle unità moltiplicato per le decine.

Secondariamente moltiplicando le tre quantità medesime per le unità, avremo

4. Il quadrato delle decine moltiplicate per le unità.

5. Due volte il prodotto delle decine nelle unità moltiplicato nuovamente per le unità, che equivale a due volte il quadrato delle unità moltiplicato per le decine.

6. Il quadrato delle unità moltiplicato per le unità, ossia il cubo delle medesime unità.

Raccogliendo tutte queste parti troveremo che il cubo d' un numero composto di decine e unità contiene una volta il cubo delle decine pel n. 1; tre volte il quadrato del-

de le decine moltiplicato per le unità pei n. 2 e 4, tre volte il quadrato delle unità moltiplicato per le decine pei n. 3 e 5; e una volta il cubo delle unità pei n. 6.

AVVERTIMENTO. Tutto questo in Algebra si vede assai più chiaramente; e perciò ne aggiugneremo un piccolo cenno ad uso di quelli che hanno qualche cognizione di questa scienza.

Si espriman dunque le decine colla lettere a, e le unità colla lettera b. Un numero composto di decine o d' unità sarà espresso da $a + b$. Ora facendo il quadrato di $a + b$, cioè moltiplicando $a + b$ per se stesso, avremo

$$a^2 + 2ab + b^2$$

e moltiplicando nuovamente queste tre quantità per $a + b$, avremo

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + a^2b + 2ab^2 \end{array}$$

che sommate insieme daranno

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

vale a dire il cubo di a, più 3 volte il quadrato di a moltiplicato per b, più 3 volte il quadrato di b moltiplicato per a, più il cubo di b.

Sia diffatti il numero 24: il suo quadrato è 529; il suo cubo è 12167. Or questo cubo contiene:

1. Il cubo delle decine, il quale è 8, e che dee scriversi al luogo delle migliaja, perchè il cubo di 10 è 1000.

2. Tre volte il quadrato delle decine moltiplicate per le unità, il quale è 36, e che dee scriversi da destra a sinistra cominciando dal luogo delle centinaja, perchè il quadrato di 10 è 100.

3. Tre volte il quadrato delle unità moltiplicato per le decine, il quale è 54, e che dee scriversi da destra a sinistra cominciando dal luogo delle decine.

4. Il cubo delle unità, che è 27, e che dee scriversi cominciando dal luogo delle unità.

8
36
54
27
12167

Diffatti sommando queste quattro parti così disposte, avrem come sopra il cubo 12167.

Ora affin di vedere in qual modo estrar si possa la radice cubica da un numero il quale contenga delle migliaja, e in cui la radice per conseguenza debba esser composta di decine, e di unità, prendasi lo stesso cubo trovato di sopra 12167.

ESEMPIO I. Estrarre la radice cubica da un numero contenente delle migliaja.

Nel proposto numero 12167 osservisi in primo luogo, che il cubo delle decine deve essere contenuto nei numeri esprimenti le migliaja.

Scritto adunque il suddetto numero.

1. Si separino con una linea le tre ultime cifre alle destra.

2. Nelle due cifre che rimangono alla sinistra, esprimenti 12 migliaja cerchisi il maggior cubo ch'è 8, e se n'estragga la radice ch'è 2, la qual si scriva sopra alla linea orizzontale al luogo delle radici.

3. Il cubo di 2 ch'è 8 si sottragga dal 12, e al residuo 5 si unisca il secondo membro 167.

4. Il numero 4167 che ne risulta, dee contenere tre volte il quadrato delle decine moltiplicato per le unità, più tre volte il quadrato delle unità moltiplicato per le decine, più il cubo delle unità. Ora la prima di queste tre quantità deve esser compresa nei numeri che contengono le centinaja, perchè il quadrato di 10 dà 100. Si stacchino adunque con una virgola le due ultime cifre esprimenti le decine semplici, e le unità, poi le cifre che rimangono esprimenti 41 centinajo si dividano pel triplo quadrato delle decine, che quì (facendo il quadrato di 2 ch'è 4, e moltiplicandolo per 3) riesce 12. Il quoto 3 sarà la radice delle unità.

5. Per farne la pruova si osservi, se nel numero 4197 si contengan diffatti le tre quantità succennate. Si moltiplichi adunque primieramente il triplo quadrato delle de-

ci-

12|167|23
8
—
41,67

4 3600
3 540
12 27
—
4167

cine 2 ch'è 12, per le unità 3, e avremo 36 esprimente 36 centinaja, ossia 3600; poi si moltiplichi il triplo quadrato delle 3 unità ch'è 27, per le decine 2, e avremo 54 esprimente 54 decine, ossia 540; finalmente si faccia il cubo delle 3 unità ch'è 27; e sommate queste tre quantità avremo appunto 4167; dal che apparirà, che il 3 è la vera radice delle unità, e che in tutto la radice cubica del proposto numero è 23.

Se la somma delle tre quantità succennate superasse il numero 4167, ciò sarebbe indizio, che la radice 3 sarebbe troppo grande, e converrebbe prendere un' unità di meno, cioè il 2, e rifarne la pruova. E se la somma risultasse minor del suddetto numero 4167, ciò mostrerebbe che il numero proposto non sia un cubo perfetto; e sottratta la detta somma dal 4167, si avrebbe un residuo, sul quale potrebbesi poi operare coi decimali, come accenneremo in seguito, per accostarsi di più alla vera radice.

ESEMPIO II. Estrarre la radice cubica da un numero contenente dei milioni.

Sia proposto il numero 71473375. Egli è chiaro che la radice cubica di questo numero deve essere di 3 cifre; e che tra queste la radice esprimente le centinaja deve essere contenuta nei milioni, perchè il cubo di 100 è 1000000; la radice esprimente le decine deve esser contenuta nelle migliaja perchè il cubo di 100 è 1000; e la

radice delle unità deve esser compresa nel rimanente.

Ciò posto ecco tutta l'operazione, di cui soggiugneremo in seguito la spiegazione.

71|473|375	|415			
64				
—	16	4800	41	2521500
74,73	3	120	41	30750
49,21	—	1	—	125
—	48	—	41	—
25,523,75		4921	164	2552375
			1681	
			3	
			5043	

In 1. luogo adunque dividasi il proposto numero di tre in tre cifre venendo da destra a sinistra.

2. Prescindasi a principio dal terzo membro 375, e s' incominci a operare su gli altri due come nel I. Esempio, cercando in questi le decine e le unità; giacchè realmente le centinaja non sono che decine di decine; e le decine semplici non sono che unità di decine.

3. Pertanto nel primo membro 71 si cerchi il maggior cubo, che nella Tavola p. 130 si troverà essere 64, e la sua radice cubica 4 si scriverà sopra alla linea orizzontale.

4. Sottraggasi il cubo 64 dal numero 71, e al residuo 7 uniscasi il secondo membro 473, separandone con una virgola le due ultime cifre alla destra.

5.

5. Le due cifre 74 si dividano pel triplo quadrato di 4, cioè per 16 preso tre volte che dà 48, e il quoto 1 si scriva alla radice.

6. Si moltiplichi il triplo quadrato delle decine 4 per le unità, e avremo 48 centinaja, ossia 4800; poi si moltiplichi il triplo quadrato delle unità, che quì è 3, per le decine 2, e avremo 12 decine, ossia 120; poi facciasi il cubo delle unità, che quì riman 1; e la somma di queste tre quantità che è 4921, sottraggasi dal numero 7473.

7. Si ripigli il terzo membro 375 omesso nelle operazioni precedenti, e si unisca al residuo 2552, onde avremo 2552375, e se ne separino con una virgola le due ultime cifre. Nelle altre 25523 dee contenersi il triplo quadrato delle 41 decine finor trovate moltiplicato per le unità.

8. Affine adunque di trovare le unità, si faccia il quadrato di 41, che è 1681, e si prenda tre volte, onde avremo 5043; indi per questo numero si divida il numero 25523; il quoto 5, qualora non sia un numero troppo grande, nel qual caso dovrebbe diminuirsi di un' unità, esprimerà la cercata radice delle unità.

9. Per farne la pruova si moltiplichi il triplo quadrato delle decine 5043 per le unità 5, onde avremo 25215 centinaja, ossia 2521500; poi si moltiplichi il triplo quadrato delle unità, che quì dà 75, per le decine 41, onde avremo 3075 decine, os-

sia 30750; finalmente si faccia il cubo delle unità ch'è 125; e sommate queste tre quantità avremo appunto 2552375: onde risulterà, che il 5 è la vera radice delle unità, e che la radice cubica del proposto numero è in tutto 415.

Fin quì abbiam operato sopra cubi perfetti, e senza difficoltà. Or vedremo come si debba cercar la radice per approssimazione quando il proposto numero non sia un cubo perfetto, e come si debba procedere allorchè la radice debba contenere alcun zero, o allorchè alcun de' numeri trovati per la radice si riconosca essere troppo grande ec.

ESEMPIO III. Cercar per approssimazione la radice cubica di un numero, che non sia un cubo perfetto.

Sia proposto il numero 8987. La sua radice cubica per approssimazione si troverà coll' operazione seguente, cui spiegheremo in appresso.

8|987	|20,79			
8				
—	400	840000	207	115692300
	3	29400	207	503010
9,870,00	—	343	—	729
8 697 43	1200	—	1449	—
—		869743 000		11619603
1 172 570 00		414		
1 161 960 39		—		
—		42849		
10 609 61		3		
		128547		

In 1. luogo adunque separate con una linea

nea le tre ultime cifre, si cerchi la radice cubica di 8, la quale è 2.

2. Il cubo 7 si sottragga dall' 8, e non restando alcun residuo, s' abbassi il secondo membro, separando al solito le due ultime cifre.

3. Per trovar la seconda radice, avrebbe a dividersi la cifra 9, che riman sola a sinistra, pel triplo quadrato della prima radice 2, il quale è 12. Ma siccome il 12 in 9 non è contenuto niuna volta, così alla radice si scriva zero.

4. La radice finor trovata è: 0 col residuo 987; e diffatti il cubo di 20 è 8000, e per arrivare al proposto numero restano appunto 987. Or volendo pei decimali accostarsi di più alla vera radice, si aggiungan tre zeri al suddetto residuo separandone al solito i due ultimi con una virgola, e si divida il numero 9870 pel triplo quadrato della radice 20, ossia per 400 preso tre volte, che forma 1200.

5. Il quoto sarebbe 8; ma siccome questo alla pruova si troverà troppo grande; così converrà diminuirlo di un'unità, e scriver 7. Infatti moltiplicando il triplo quadrato di 20, ossia il 1200 per 8, avremo 9600 centinaja, cioè 960000; moltiplicando il triplo quadrato di 8, che dà 192, per 20, avremo 3840 decine, cioè 38400; e facendo il cubo di 8, avremo 512, i quali numeri sommati insieme danno 998912, somma evidentemente maggiore del numero 987000; da cui avrebbe a sottrarsi. Al-

§. 2. *Estrazione della radice cubica delle parti decimali.*

L'Estrazione della radice cubica dai numeri decimali si fa allo stesso modo, come da' numeri interi. Così nel I. Esempio se il proposto numero invece di 12167 fosse 0, 12167 ossia 12167 centomillesimi; la radice si troverebbe 0, 23, ossia 23 centesimi.

Nella stessa maniera pur trovasi la radice dei numeri composti d' interi, e di decimali. Così nel II. Esempio, se il numero proposto invece di 71473375 fosse 71473, 375, la sua radice sarebbe 41, 5, e se fosse 71, 47375, la radice si troverebbe 4, 15.

Resta solo qui ad avvertire, che affin d' avere nella radice i decimali separati dagli interi, è necessario che nel proposto numero essi formino membri separati, e perciò che siano 3, o 6, o 9 ec.; e quando ne manchi uno o due, converrà aggiugnervi uno, o due zeri. Così se fosse proposto il numero 14, 35, converrebbe scrivere 14, 350, e se fosse proposto 15, 2371, converrebbe scrivere 15, 237100.

§. 3. *Distrazione della radice cubica delle Frazioni.*

Rispetto alle frazioni siccome il loro cubo nasce dal moltiplicare due volte in se stesso tanto il numeratore, quanto il deno-

minatore; così l'estrazione della radice si deve fare tanto dall'uno come dall'altro. Infatti il cubo di $\frac{2}{3}$ si ha moltiplicando prima $\frac{2}{3}$ per se stessi, onde viene il quadrato $\frac{4}{4}$, e poi moltiplicando nuovamente questo quadrato per $\frac{2}{3}$, onde vengono $\frac{2}{17}$. Volendo adunque aver la radice cubica di questa frazione, converrà estrarla separatamente così dal numeratore, come dal denominatore, onde s'avranno $\frac{2}{3}$ come sopra.

Anche quì però è da osservarsi, come abbiamo avvertito rispetto alla radice quadrata, che siccome il denominatore è quello che costituisce il carattere della frazione, così è necessario ch'egli sia un cubo perfetto, e qualora nol sia, conviene renderlo tale col moltiplicarlo pel suo quadrato, e per lo stesso quadrato moltiplicare poi anche il numeratore, onde conservar il valore della frazione.

ESEMPIO I. Così se fosse proposta la frazione $\frac{5}{9}$, ove il denominatore non è un cubo perfetto, moltiplicando e numeratore e denominatore per 81, che è il quadrato di 9, avremo in sua vece $\frac{405}{729}$, ove la radice del denominatore sarà 9, e la radice prossima del numeratore sarà 7 con 62 di residuo; sicchè tutta insieme la radice di $\frac{5}{9}$ sarà $\frac{7}{9}$, prossima al vero a meno di $\frac{1}{0}$.

ESEMPIO II. Volendosi dalla detta frazione $\frac{5}{9}$ cambiata in $\frac{405}{729}$ avere una radice ancor più vicina, sicchè dal vero differisca a cagion d'esempio meno di un centesimo, al numeratore 405 si aggiungan sei zeri, e

si

si estragga la radice cubica dal numero 405000000 nel modo seguente.

405|000|000	17,39			
343	49	44100	73	14388300
———	3	1890	73	177390
620,00	———	27	———	729
460,17	147	———	219	———
159830,00		46017	511	14566419
145664,19			———	
———			5329	
1516581			3	
			———	
			15987	

Quì osservisi, che per la seconda radice, dividendo 620 per 147, il quoto sarebbe 4; ma siccome alla pruova risulta il numero 62224 maggiore di 60000, così per radice conviene prendere soltanto il 3. Il resto è eseguito secondo le solite regole.

La radice adunque cercata sarà $\frac{739}{9}$, la quale se vorrà tutta aversi in numeri decimali, basterà dividere il numeratore pel denominatore, e si avranno 0, 82 con 1 di residuo.

ESEMPIO III. Affine però di avere in numeri decimali la radice cubica di una frazione, la più spedita è simile a quella che già abbiamo indicato per la radice quadrata a pag. 142. S' aggiungano adunque al numeratore della frazione tre volte tanti zeri, quanti decimali aver si vogliono alla radice, poscia dividasi il numeratore pel denominatore, e dal quoto estraggasi la radice cubica secondo il solito.

Quì essendo $\frac{5}{9}$ la frazione proposta, e volendosi alla radice due decimali, si aggiungan 6 zeri al numeratore, che diverrà 5,000000, e diviso pel denominatore darà per quoto 6,555555 con 5 di residuo. Dal suddetto quoto estraggasi la radice cubica secondo il solito, e questa risulterà 0, 82 come sopra. Ecco l'operazione per maggior pruova.

5551555	182	
512		
	64	38400
435,55	3	960
393,68		8
	192	
4187		39368

ESEMPIO IV. Se il proposto numero sarà misto d'interi, e rotti, per esempio $5\frac{2}{3}$, si ridurrà prima tutto a frazione, che qui darà $\frac{17}{3}$, poi si moltiplicherà numeratore è denominatore pel quadrato di 3, cioè per 9, onde avere al denominatore un cubo perfetto, e ne risulteranno $\frac{153}{27}$; finalmente da questa frazione si estrarrà la radice cubica, che sarà $\frac{5}{3}$ con 28 di residuo, sul quale operando colle regole sopraccennate, potrà la radice accostarsi al vero fino a quel segno che più aggrada.

ESEMPIO V. Se da un intero, che non sia cubo perfetto, per esempio dal 3 si vorrà aver la radice cubica in modo, che dal vero differisca meno di una data unità frazionaria, per esempio meno di $\frac{1}{12}$, si moltiplichi prima il 3 pel cubo di 12, ch'è 1728,

e si

e si divida per lo stesso cubo, onde s'avrà la frazione $\frac{5}{1}\frac{184}{728}$, poi da questa frazione estraggasi la radice cubica, e ne verranno $\frac{16}{3}\frac{4}{4}$, o $\frac{2}{3}$, o $1\frac{1}{2}$, la cui differenza dalla vera radice di 3 sarà minore di $\frac{1}{12}$. Ecco l'operazione rispetto alla radice del numeratore, giacchè quella del denominatore è chiaro dover essere lo stesso 12, di cui si è formato il cubo 1728.

5|184	118	
1		
—	3	2400
41,84		640
35,52		512
632		3532

Quì resta solo ad osservare, che la seconda radice, dividendo il 41 per 3 sarebbe 9; ma siccome alla pruova dà il numero 4239 maggiore di 4184, così convien prendere l'8 soltanto.

§. 4. *Quesiti pratici per l'Estrazione della Radice cubica.*

PErchè veggasi qualche uso pratico anche dell'estrazione della radice cubica, aggiungeremo i due seguenti Quesiti:

QUESITO I. " Vuolsi formare una cisterna di figura cubica la qual contenga 1728 piedi cubici d'acqua. Domandasi di qual misura dovrà essere la sua lunghezza, larghezza, e profondità ".

Nel cubo la lunghezza, larghezza, e pro-

che quando il numero delle cifre, da cui è espressa una potenza qualunque, non superi l'esponente della medesima, la sua radice è sempre composta di sole unità, cioè non è che un numero semplice.

Questo si è già veduto rispetto alla seconda, e alla terza potenza, essendo una sola la radice quadrata di un numero di 2 cifre, e la cubica di un numero di 3 cifre. Allo stesso modo una sola è pur la radice quarta di un numero di 4 cifre, la quinta di un numero di 5 cifre ec.

La ragione è pur facile a riconoscersi, osservando, che il minor numero di due cifre, cioè il 10, alzato alla seconda potenza ne ha tre, cioè 100; alzato alla terza ne ha 4, cioè 1000; alzato alla quarta ne ha 5, cioè 10000 ec.

Dato adunque per esempio un numero di 5 cifre, dal quale si debba estrarre la radice quinta, altro non dovrà farsi, che ricercare quale dei numeri semplici alzato alla quinta potenza si accosti al proposto numero più da vicino. Così la radice quinta di 16807 sarà esattamente il 7; la radice quinta di 46240 sarà prossimamente l'8, essendo la quinta potenza di 8 il numero 32768, e la quinta potenza di 9 il numero 59049.

Qualora il numero delle cifre proposte superi l'esponente della radice che vuolsi estrarre, ciò sarà indizio, che la radice dovrà esser composta almeno di due cifre esprimenti delle decine, e delle unità. Così

si di due cifre a cagion d' esempio sarà la radice quinta del numero 248832.

Ora per trovare in qual modo si possa da questo numero estrarre la radice quinta, e generalmente come si possa estrarre da qualunque numero una radice qualunque che debba esser composta di decine, e di unità, si osservi primieramente, come abbiam fatto per l' estrazione delle due radici quadrata e cubica, di quali parti sia composta la potenza corrispondente di un numero di due cifre, vale a dire, di un numero che in se contenga unità, e decine.

Le decine si chiamin a, le unità b. Moltiplicando $a + b$ per $a + b$ avremo, come già si è veduto, il quadrato $a^2 + 2ab + b^2$; moltiplicando questo per $a + b$ avremo il cubo $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; seguitando la moltiplicazione per $a + b$ ne verranno di mano in mano la quarta, la quinta, la sesta potenza, e tutte le altre potenze superiori.

Per maggior comodo noi darem quì l' espressione delle prime 8 potenze, e indicheremo come la serie si possa continuare anche senza ripetere per ciascuna l' attuale moltiplicazione per $a + b$.

$$a + b$$

$$a^2+2ab+b^2$$

$$a_1+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$a5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b_5$$

$$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

$$a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$$

$$a^8+8a^7b+28a^4b^2+56a^3b^3+79a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^4+8ab^7+b^8$$

b, la terza sarà $8 + 28$; ossia $36\ a^7\ b^2$; la quarta sarà $20 + 56$, ossia $84\ a^6\ b^2$; la quinta sarà $56 + 70$, ossia $126\ a^5\ b^4$; la sesta sarà $70 + 56$, ossia $126\ a^4\ b^5$; la settima sarà $56 + 28$, ossia $84\ a^3\ b^6$; l'ottava sarà $28 + 8$, ossia $36\ a^2\ b^7$; la nona o penultima sarà $9\ ab^8$; e l'ultima sarà b^9; ficchè riunendo queste quantità, la nona potenza di $a + b$ sarà $a^9 + 9\ a^8\ b + 36\ a^7\ b^2 + 84\ a^6\ b^3 + 126\ a^5\ b^4 + 126\ a^4\ b^5 + 84\ a^3\ b^6 + 36\ a^2\ b^7 + 9\ ab^8 + b^9$. Allo stesso modo si potrà ottenere successivamente la formazione di qualunque altra potenza dal *binomio* $a + b$, che tal chiamasi una quantità composta di decine e d'unità.

Avendo poi la formola delle parti, di cui una potenza è composta, non sarà difficile il trovar la maniera, con cui estrarne la radice corrispondente.

Sia, per esempio, da estraersi la radice quinta dal numero 248832. Essendo questo numero composto di sei cifre, ciò indicherà, che la radice dee esser composta di decine, e di unità.

Or la formola della quinta potenza di un numero composto di decine, e di unità, come abbiamo veduto pocanzi, si è $a^5 + 5\ a^4\ a + 10\ a^3\ b^2 + 10\ a^2\ b^3 + 5\ ab^4 + b^5$ vale a dire contiene

1. La quinta potenza delle decine.

2. Cinque volte la quarta potenza delle decine moltiplicata per le unità.

3. Dieci volte il cubo delle decine mol-

ti-

tiplicato pel quadrato delle unità.

4. Dieci volte il quadrato delle decine moltiplicato pel cubo delle unità.

5. Cinque volte le decine semplici moltiplicate per la quarta potenza delle unità.

6. La quinta potenza delle unità.

Ciò posto osservisi primieramente, che a^5, ossia la quinta potenza delle decine non può esser compresa in niuna delle 5 prime cifre venendo da destra a sinistra, perchè 5 cifre non bastauo a contenere la quinta potenza di 10. Sarà dunque compresa nelle altre cifre a sinistra, delle quali quì non rimane che il 2.

Scritto pertanto il proposto numero.

1. Si cominci a separarne con una lineetta le cinque cifre alla destra.

2. Dalle cifre che rimangono alla sinistra, cioè dal 2 si estragga la radice quinta, che sarà 1, giacchè 1 è pur la maggiore quinta potenza che si contenga nel 2.

2|48832|12	
1	
	5 100000
	40000
14,8832	8000
	800
	32
	148832

3. La quinta potenza di 1, si sottragga dal 2, e al residuo 1 si unisca il secondo membro che sarà 148832.

4. Si osservi che la seconda quantità 3 $a_4 b$ esprimente cinque volte la quarta potenza delle decine moltiplicata per le unità, non può contenersi nelle ultime 4 cifre

fre alla destra, perchè la quarta potenza di 100 dà 10000. Si conterrà adunque nelle altre due cifre alla sinistra, cioè nel 14. Si separin pertanto con una virgola le quattro cifre alla destra, poi il 14 si divida per la quarta potenza delle decine presa 5 volte; e il quoto darà le unità, vale a dire la seconda radice. Or quì la quarta potenza di 1 è 1, e questo preso 5 volte dà 5. Si divida adunque il 14 per 5, e il quoto 2 sarà la seconda radice desiderata.

5. Per farne la pruova, si formi prima la quantità $5\ a^4\ b$, cioè si moltiplichi la quantità $5\ a^4$, che quì è 5, per b, che è 2, e avremo 10 decine di migliaja, ossia 100000; poi si formi la quantità $10\ a^3\ b^2$ cioè si moltiplichi il cubo delle decine ch' è 1, pel quadrato delle unità ch' è 4, e prendasi 10 volte; e avremo 40 migliaja, ossia 40000; indi si formi la quantità $10\ a^2\ b^3$, cioè si moltiplichi il quadrato delle decine ch' è 1, pel cubo delle unità ch' è 8, e prendasi parimente 10 volte, e avremo 80 centinaja, ossia 8000; in seguito si formi le quantità $5\ ab^4$, cioè si moltiplichi il numero delle decine che quì è 1, per la quarta potenza delle unità ch' è 16, e prendasi 5 volte, onde avremo 80 decine, ossia 800; per ultimo si formi la quinta potenza delle unità, cioè del 2, e avremo 32. Sommate tutte queste quantità daranno esattamente 148832, dal che apparirà che la radice quinta del proposto numero è il 12 precisamente; e diffatti al-

zan-

zando questo alla quinta potenza, ne verrà appunto il proposto numero 248832.

La pruova può anche farsi in altra maniera, dalla quale risulterà più presto, e più facilmente, se mai la seconda radice fosse un numero troppo grande, e dovesse diminuirsi.

Invece del numero 248832 sia proposto il numero 268832.

Scritto, come sopra, questo numero, e separate le 5 ultime cifre.

1. Si estragga dal 2 la radice quinta, che sarà 1.

2. La quinta potenza di 1, che pur è 1, si sottragga dal 2, e al residuo 1 si aggiunga la seguente cifra 6.

3. Il 16, che ne risulta si divida per $5a^4$, cioè per la quarta potenza di 1 presa 5 volte, che quì dà 5. E il quoto che dovrebbe esprimere la seconda radice, sarà 3. Ma prima di scrivere il 3 al luogo delle radici, gli si dia a parte la seguente pruova.

2|68832	|12
1	5
16	
10	
68	
40	
288	
80	
2083	
80	
20032	
32	
20000	

4. Si formi adunque la quantità $5a^4b$, vale a dire si moltiplichi la quantità $5a^4$, che quì è 5, per b che è 3, e avremo 15, che sottratto da 16 darà 1 di residuo. A questo residuo si unisca la cifra seguente 8, e dal numero 18, che ne risulta, si sot-

sottragga la quantità 10 a^3 b^2, che quì è 90 (poichè il cubo di a, ch'è 1, moltiplicato pel quadrato di b ch'è 9, dà 9, e questo preso 10 volte dà 90). Or non potendosi il 90 sottrarre dal 18, ciò sarà indizio che la radice 3 è troppo grande, e conviene diminuirla.

5. Prendasi adunque il 2, e si formi di nuovo la quantità 5 a^4 b, che or darà 10, e questo sottratto dal 16 lascerà 6 di residuo.

6. Al 6 uniscasi la cifra seguente 8, onde avrem 68, e da questo sottraggasi la quantità 10 a^3 b^2, che or sarà 40, e lascerà 28 di residuo.

7. A questo pure s'unisca la seguente cifra 8, e dal numero 288 sottragasi la quantità 16 a^2, b^3, che sarà 80, e lascerà di residuo 208.

8. A questo parimente si unisca la cifra seguente 3, e dal numero 2083 sottraggasi la quantità 5 a b^4, che è 80, e avrem di residuo 2003.

9. A questo pur finalmente uniscasi l'ultima cifra 2, e se ne sottragga la quantità b^5, che è 32, e rimarrà il residuo 20000.

La cercata radice adunque sarà 12 come sopra, e s'avrà il residuo 20000, che è appunto ciò che si è aggiunto al numero precedente 248832, scrivendo in sua vece 268832.

Se dal residuo 20000 si volesse estrarre una nuova radice per approssimazione in numeri decimali, basterebbe aggiugnergli

5 ze-

5 zeri, onde diverrebbe 2000000000, e considerando il 12 come la sola radice delle decine, rinnovare le operazioni sopraccennate per trovar la radice delle unità, che quì dividendo 200000 per la quarta potenza di 12 presa 5 volte, cioè per 103680, darebbe 1 decimo.

Collo stesso metodo si estrarrà qualunque altra radice di qualunque grado, separando prima dal proposto numero tante cifre alla destra, quanto è l'esponente della radice cercata, indi ptocedendo di mano in mano secondo le parti, che si vedran contenute nella formola della potenza corrispondente.

Molte radici però si posson trovare colla sola estrazione della radice quadrata, e cubica ripetuta più volte.

Imperocchè in 1. luogo è da notarsi, che estraendo la radice quadrata da qualunque potenza pari, cioè che abbia per esponente un numero pari, risulta per radice una potenza che ha per esponente la metà del detto numero. Così estraendo la radice quadrata dalla quarta potenza di 2, che è 16, questa radice si trova esser 4, che è la seconda potenza del medesimo 2.

In 2. luogo è pur da notarsi che estraendo la radice cubica da una potenza, il cui esponente sia divisibile per 3, si ha per radice una potenza, il cui esponente è il quoto dell'esponente anzidetto diviso per 3. Così la radice cubica della sesta potenza di 2, che è 64, si trova esser 4, che è la se-

seconda potenza del medesimo 2, cioè quella potenza che ha per esponente il quoto dell' esponente 6 diviso per 3.

Ciò posto volendo aver la radice quarta di 16, si cominci ad estrarne la radice quadrata, e avrem 4; poi da questa estraggasi nuovamente la radice quadrata, e avrem 2. Volendo aver la radice sesta di 64, se ne estragga prima la radice cubica, e avrem 4, poi la quadrata, e avrem 2; ovvero se ne estragga prima la quadrata, e avrem 8, poi la cubica, e avrem 2.

Allo stesso modo la radice quadrata dell' ottava potenza darà la quarta, e la quadrata di questa darà la seconda: la radice cubica della nona potenza darà la terza; la radice quadrata della decima potenza darà la quinta; la radice cubica della duodecima potenza darà la quarta, e la quadrata di questa darà la seconda; ovvero la radice quadrata della duodecima potenza darà la sesta, e la cubica di questa darà la seconda ec.

SEZIONE III.

DELLE PROGRESSIONI GEOMETRICHE.

LA progressione geometrica è una serie di numeri così ordinati fra loro, che quante volte il primo è contenuto nel secondo, altrettante il secondo è contenuto nel ter-

zo, il terzo nel quarto, il quarto nel quinto ec., oppure quante volte il primo contiene il secondo, altrettante il secondo contiene il terzo, il terzo contiene il quarto, e così di seguito.

Nel 1. caso la progressione chiamasi *ascendente*, come 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32; nel 2. caso dicesi *discendente*; come 32. 16 : 8 : 4 : 2 : 1.

I numeri che compongono la progressione si chiamano i *termini* della progressione medesima.

La relazione che passa fra un termine e l'altro si chiama la lor *ragione geometrica*; e il numero delle volte che l' uno contiene l'altro, o l'un nell'altro è contenuto, dicesi l'*esponenti della ragione*. Così nelle due suddette progressioni l'esponente della ragione è 2, perchè nella prima due volte un termine è contenuto nell' altro, e nella seconda due volte un termine contiene l'altro. Nelle progressioni 3 : 9 : 27 : 81 : 233 ec., ovvero 233 : 81 : 27 : 9 : 3 l'esponente sarebbe 3; e così successivamente.

CAPO I.

Principj fondamentali.

NEl Capo I. delle proporzioni abbiamo detto, che quattro termini sono in proporzione geometrica, allorchè il primo tante volte contiene il secondo, o è contenuto nel secondo, quante volte il terzo contiene il quarto, o è contenuto nel quarto:

to: tali sono 8 : 4 : : 6 : 3, ovvero 3 : 6 : : 4 : 8.

Abbiam pure aggiunto, che se il secondo, e il terzo termine sono eguali, la proporzione si chiama *continua*, come 2 : 4 : : 4 : 8, la quale si scrive anche a questo modo ∴ 2 : 4 : 8; in quella guisa che la proporzione continua aritmetica 2 . 4 : 4 . 6 si scrive ancora ∴ 2 . 4 . 6.

Finalmente abbiam detto, che nella proporzione geometrica il prodotto dei due termini estremi è uguale a quello dei due medj: così nella proporzione 3 : 6 : : 4 : 8. Il prodotto di 3 per 8 è uguale a quello di 6 per 4; onde viene che nella proporzione geometrica continua il prodotto dei due termini estremi è uguale al quadrato del termine medio; così nella proporzione continua ∴ 2 : 4 : 8, il prodotto di 2 per 8 è uguale al quadrato di 4.

Or una progressione geometrica non è altro appunto che una proporzione geometrica continua prolungata a piacere, conservando sempre la stessa ragione fra un termine e l'altro, come ∴ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 ec.

Di quì è in 1. luogo, che in qualunque progressione geometrica, ove il numero dei termini sia pari, il prodotto del primo ed ultimo termine, ossia dei due estremi, è uguale a quello dei due medj: così nella progressione ∴ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 il prodotto di 2 per 64 è 128 egualmente come quello di 8 per 16.

2. In qualunque progressione geometrica, ove il numero de' termini sia dispari, il prodotto del primo, ed ultimo è uguale al quadrato del termine medio: così in questa ÷ 2 : 4 : 8 : 16 : 32, il prodotto di 2 per 32 è 64 egualmente come il quadrato di 8. Dal che poi viene, che per trovare il medio, o mezzo proporzionale in qualunque progressione geometrica dispari, basta moltiplicare il primo per l' ultimo termine, e dal loro prodotto estrarre la radice quadrata.

3. In qualunque progressione geometrica o pari o dispari il prodotto di due termini equidistanti dal primo e dall'ultimo è uguale a quello di due altri parimente dal primo e dall' ultimo equidistanti: così nella progressione pari ÷ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 il prodotto di 4 per 32 dà 128 egualmente come quello di 8 per 16, e nella progressione dispari ÷ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 il prodotto di 2 per 32 dà 64 del pari come quello di 4 per 16.

4. Ogni termine è composto del primo termine moltiplicato tante volte per l'esponente della ragione, quanti sono i termini fra il primo esclusivamente, e il termine dato inclusivamente: così nella progressione ÷ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 il quarto termine 16 è composto del primo termine 2 moltiplicato tre volte per l'esponente 2; e il quinto termine 32 è composto similmente del primo termine 2 moltiplicato quattro volte per lo stesso esponente 2. Nella pro-

gres-

gressione ∴ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 il termine 9 composto del primo 1 moltiplicato due volte per l'esponente 3, il quarto 27 risulta dal primo 1 moltiplicato tre volte per lo stesso esponente 3 ec. Or quì si osservi, che tanto è il moltiplicare il primo termine due o tre volte per l'esponente, come il moltiplicarlo una volta pel quadrato o pel cubo del medesimo; così moltiplicando l' 1 due volte per 3, alla prima abbiam 3, alla seconda abbiamo 9, egualmente come moltiplicando una volta sola l' 1 pel quadrato di 3, che è 9; similmente l' 1 moltiplicato tre volte per 3 dà 27 egualmente, come moltiplicato una volta pel cubo di 3, che è 27. Ogni termine adunque di una progressione geometrica sarà eguale al primo termine moltiplicato per l' esponente della ragione alzato a una potenza di tanti gradi, quanto è il numero dei termini fra il primo esclusivamente, e il termine dato inclusivamente. Infatti anche nel primo esempio il quarto termine 16 è uguale al primo 2 moltiplicato per la terza potenza dell' esponente 2, cioè per 8, nel 2 esempio il quinto termine 32 è eguale al primo 2 moltiplicato per la quarta potenza dell' esponente 2, cioè per 16. Di quì è che l' ultimo termine di qualunque progressione sarà eguale al primo termine moltiplicato per l' esponente della ragione alzato a una potenza di tanti gradi, quanti sono i termini escluso il primo, ossia quanto è il numero de' termini meno 1. Diffatti nel-

la prima progressione ∴ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 l'ultimo termine 32, come abbiamo veduto, è eguale al primo 2 moltiplicato per la quarta potenza dell'esponente 2, ossia per 16; e nella seconda progressione ∴ 1: 3 : 9 : 27 : 81 l' ultimo termine è pur uguale al primo 1 moltiplicato per la quarta potenza dell' esponente 3, ossia per 81.

AVVERTIMENTO. Di quì ne segue, che se chiameremo l' ultimo termine u, il primo p, l' esponente della ragione r, il numero dei termini n, sarà l' ultimo termine u eguale al primo p moltiplicato per l' esponente r alzato alla potenza $n - 1$, ossia avremo l' equazione $u = prn - 1$ che è una delle equazioni fondamentali, da cui si cavan le formole per la soluzione de' Quesiti delle progressioni geometriche.

5. In ogni progressione geometrica il primo termine sta al secondo, come la somma di tutti i termini meno l' ultimo sta alla somma di tutti i termini meno il primo. Imperocchè la progressione ∴ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 equivale per ciò che si è detto di sopra, alla proporzione continuata 2 : 4 : : 4 : 8 : : 8 : 16 : : 16 : 32, dove è manifesto, che ciascun termine è antecedente insieme e conseguente, eccetto il primo che è soltanto antecedente, e l' ultimo che soltanto è conseguente. Or siccome in ogni proporzione continua il primo termine sta al secondo, come la somma di tutti gli antecedenti sta alla somma di tutti i conseguenti; così in ogni progressione il primo

mo termine starà al secondo, come la somma di tutti i termini meno l' ultimo (che equivale alla somma di tutti gli antecedenti), sta alla somma di tutti i termini meno il primo (che equivale alla somma di tutti i conseguenti).

AVVERTIMENTO. Da questo principio si deduce la seconda equazione fondamentale per le progressioni geometriche. Imperocchè se il primo termine sta al secondo, come la somma di tutti i termini meno l' ultimo sta alla somma di tutti i termini meno il primo, moltiplicando gli estremi, e i medj avremo il prodotto del primo termine moltiplicato per la somma di tutti i termini meno il primo, eguale al prodotto del secondo termine moltiplicato per la somma di tutti i termini meno l' ultimo; e chiamando il primo termine p, il secondo b, l' ultimo u, la somma di tutti i termini s, sarà p moltiplicato per $s - p$ eguale a b moltiplicato per $s - u$; dal che s' avrà l' equazione $ps - pp = bs - bu$, dalla quale ricavasi $bs - ps = bu - pp$;

e perciò $s = \frac{bu - pp}{b - p}$, cioè la somma di tutti i termini è uguale al prodotto del secondo per l' ultimo termine meno il quadrato del primo termine, il tutto diviso pel secondo termine meno il primo. Siccome poi il secondo termine equivale al primo moltiplicato per l' esponente della ragione (che diffatti nella progressione succen-

nata il secondo termine 4 non è altro che il primo 2 moltiplicato per l' esponente 2); così chiamando *pr* il prodotto del primo termine per l' esponente della ragione, e sostituendo *pr* in luogo di *b* nell' ultima equazione $s = \frac{bu - pp}{\quad}$, avremo $s = \frac{pru - pp}{\quad}$; e dividendo il numeratore, e il denominatore per *p* resterà $s = \frac{ru - p}{r - 1}$, cioè la somma di tutt' i termini sarà eguale al prodotto dell' esponente per l' ultimo termine, meno il primo termine, il tutto diviso per l' esponente meno 1.

Dalle due equazioni accennate, l'una per l' ultimo termine, cioè $n = pru - 1$, e l'altra per la somma dei termini, cioè $s = \frac{ru - p}{r - 1}$ gli Algebristi ricavano tutte le formole per trovare in tutt' i modi la somma dei termini, il numero dei medesimi, l' ultimo termine, il primo termine, e l' esponente della ragione ogni volta che sian date tre di queste cose.

Noi ci contenteremo di aver indicato i principj da cui nascono le due predette equazioni, senza impegnarci a dimostrare eziandio come ne derivino le altre formole; giacchè questo difficilmente potrebbe spiegarsi a chi non ha cognizione dell' Algebra; e chi l' ha facilmente potrà ritrovarle

le da se medesimo colle opportune sostituzioni.

Indicheremo però a oggetto di maggior brevità le stesse formole di mano in mano, come abbiamo fatto per le progressioni aritmetiche, soggiugnendone la spiegazione, e gli esempi; pei quali a maggior chiarezza ci serviremo sempre della stessa progressione ∴ 2 : 4 : 8 : 16 : 32; siccome pur nelle formole per esprimere le stesse cose ci serviremo sempre delle medesime lettere, chiamando

Il primo termine . . .	*p*
L'ultimo termine . . .	*u*
L'esponente della ragione .	*r*
Il numero dei termini . .	*n*
La loro somma . . .	*s*

AVVERTIMENTO I. Chi amasse di veder queste cose trattate più estesamente, potrà consultare fra gli altri il *Corso di Matematica del Signor Ab. Bossut tradotto dal Francese ad uso della R. Università di Pavia con delle aggiunte*, stampato in Pavia nel 1787, ove nel I. Volume al Capo X. dell'Algebra si dà la teoria generale delle proporzioni, e progressioni così aritmetiche, come geometriche. Si avverta soltanto, che a pag. 276 il ch. Autore dall'equazione $ps - pp = bs - bu$ (che ivi è espressa per $as - aa = bs - bk$, chiamandosi il primo termine a, e l'ultimo k) ca-

va l'equazione $ps - bs = pp - bu$, onde viene $s = \frac{pp-bu}{p-b}$, e fatta la sostituzione di pr in luogo di b, ne viene finalmente $s = \frac{p-ru}{1-r}$. Or da questa equazione la somma dei termini s'ottiene bensì in numeri positivi quando la progressione è discendente, essendo allora il primo termine maggior dell'ultimo; ma nelle progressioni ascendenti, ove il primo termine è minor dell'ultimo, risulta sempre negativa. Quindi è, che avendo noi scelta per esempio una progressione ascendente, siccome quella, su cui ne' Quesiti si opera più d'ordinario, abbiamo dall'equazione suddetta $ps - pp = bs - bu$ ricavato invece $bs - ps = bu - pp$, onde poi viene, colla sostituzione di pr in luogo di b, l'equazione finale $s = \frac{ru-p}{r-1}$, la quale nelle progressioni ascendenti dà la somma de' termini in numeri positivi; e questa medesima equazione, per aver sempre i risultati in numeri positivi, abbiamo poi sostituito in tutte le formole, ov'essa ha luogo

AVVERTIMENTO II. Nelle progressioni Aritmeriche abbiam tralasciato d'indicare come nascano le due equazioni fondamen-

mentali $U = P + D \times (N-1)$, e $S = (P+U) \times \frac{N}{2}$ per timore, che questa ricerca potesse ivi ad alcuno parer oscura e difficile. Ad uso però di chi ama veder le cose nei loro principj fondatamente, giudichiamo opportuno di quì soggiungerla.

In 1. luogo adunque in ogni progressione aritmetica, per esempio ÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13, ogni termine è composto del primo termine, più la differenza presa tante volte quanti sono i termini fra il primo esclusivamente, e il termine dato inclusivamente: così nella detta progressione il quarto termine 9 è composto del primo 3, più la differenza 2 presa 3 volte, il quinto termine 11 è composto del primo 3, più la differenza 2 presa 4 volte. Da ciò viene, che l'ultimo termine 13 sarà composto similmente del primo termine 3, più la differenza 2 presa tante volte quanti sono i termini meno uno, ossia sarà eguale al primo termine 3, più la differenza 2 moltiplicata pel numero dei termini meno 1; e perciò avremo l'equazione $U = P + D \times (N - 1)$.

2. In ogni progressione aritmetica siccome la somma di due termini qualunque equidistanti dal primo, e dall'ultimo è uguale alla somma di due altri parimente dal primo è dall'ultimo equidistanti (V. pag. 96 n. 3), così ne viene che la detta somma è pur uguale alla somma dei due medesimi termini primo ed ultimo. Infatti nella pro-

gressione sopraccennata ÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 la somma di 3 + 13 dà 16 egualmente come quella di 6 + 11, e quella di 7 + 9. Or quì è manifesto, che la somma di tutt' i termini risulta dalle 3 somme anzidette dei medesimi termini presi due a due. Siccome adunque ciascuna di queste somme è uguale a quella del primo ed ultimo termine, così per aver la somma di tutti i termini basterà moltiplicare quella del primo ed ultimo per la metà del numero dei termini; laonde avremo $S = (P + V) \times \frac{N}{2}$. E diffatti in questo esempio moltiplicando la somma del primo ed ultimo termine, che è 16, per 3, che è la metà del numero dei termini, abbiam la somma totale 48.

Se la progressione è dispari, vale la stessa ragione. Imperocchè nella progressione ÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 per esempio abbiamo le tre somme de' termini equidistanti 3 + 15, 5 + 13, 7 + 11 tutte eguali fra loro, essendo ciascuna eguale a 18: e pel n. 2. p. 95. 96 il termine medio 9 è pur uguale alla metà della somma del primo ed ultimo termine. Anche quì adunque moltiplicando la somma dei due termini primo ed ultimo, che è 18, per la metà del numero dei termini che è $3\frac{1}{2}$, avremo 63 eguale alla somma di tutti i termini.

CAPO II.

Trovare la somma de' termini.

QUESITO I. *Dato* p, u, r *trovar* s.

Que-

Questo Quesito si scioglie colla seconda equazione fondamentale $s = \frac{ru-p}{r-1}$; vale a dire moltiplicando l'esponente della ragione per l'ultimo termine, sottraendo dal prodotto il primo termine, e dividendo il residuo per l'esponente della ragione meno 1. Così nella progressione ∴ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 moltiplicando l'esponente della ragione 2 per l'ultimo termine 32, avremo 64; sottraendone il primo termine 2, avremo 62; e dividendo questo per l'esponente della ragione meno 1, cioè per 1 avremo tuttavia 62 eguale alla somma di tutti i termini.

QUESITO II. *Dato* p, n, r *trovar* s.

La formola è $s = \frac{prn-p}{r-1}$; vale a dire si moltiplichi il primo termine per l'esponente della ragione alzato ad una potenza di tanti gradi, quanto è il numero dei termini; dal prodotto si sottragga il primo termine, e il residuo si divida per l'esponente della ragione meno 1. Così nella detta progressione moltiplicando il primo termine 2 per l'esponente 2 alzato alla quinta potenza, che è 32 avremo 64; sottraendone il primo termine 2 rimarranno 62; e dividendo questo per l'esponente meno 1, cioè per 1 resteranno 62 come sopra.

QUESITO III. *Dato* u, n, r *trovar* s.

La formola è $s = \frac{urn-u}{(r-1)\times rn-1}$; vale a dire si moltiplichi l'ultimo termine per l'espo-

sponente della ragione alzato ad una potenza di tanti gradi, quanto è il numero dei termini; dal prodotto si sottragga l'ultimo termine; e il residuo si divida per l'esponente meno 1 moltiplicato pel medesimo esponente alzato ad una potenza di tanti gradi, quanto è il numero de' termini meno 1. Così nella stessa progressione moltiplicando l'ultimo termine 32 per l'esponente 2 alzato alla quinta potenza, che dà pur 32, avremo 1024; da questo prodotto sottraendo l'ultimo termine 32, resteranno 992, dividendo questo residuo per l'esponente meno 1, cioè per 1, moltiplicato per lo stesso esponente alzato alla quarta potenza, cioè per 16, avremo per quoto 62 come sopra.

QUESITO IV. *Dato* p, u, n *trovar* s.

La formola è $s = u \times \frac{\sqrt[n-1]{\frac{u}{p}} - 1}{\sqrt[n-1]{\frac{u}{p}} - 1}$; va-

Ie a dire si divida l'ultimo pel primo termine; dal quoto si estragga la radice di tanti gradi, quanto è il numero dei termini meno 1; questa radice si moltiplichi per l'ultimo termine, dal prodotto si sottragga il primo termine; e il residuo si divida per la suddetta radice meno 1. Così nella me-

de-

desima progressione dividendo l'ultimo termine 32 pel primo 2, avremo 16; e traendo da questo la radice quarta avremo 2; moltiplicando questa radice per l'ultimo termine 32, avremo 64; sottraendone il primo termine 2, resteranno 62; dividendo questo residuo per la suddetta radice 2 meno 1, cioè per 1, rimarranno ancora 62 come sopra.

CAPO III.

Trovare l'ultimo termine.

QUESITO I. *Dato* p, n, r *trovar* u.

Questo si scioglie colla prima equazione fondamentale $u = prn - 1$; vale a dire moltiplicando il primo termine per l'esponente della ragione alzato ad una potenza di tanti gradi, quanto è il numero dei termini meno 1. Così nella sopra accennata progressione ∴ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 moltiplicando il primo termine 2 per l'esponente 2 alzato alla quarta potenza, cioè per 16, avremo 32 eguale all'ultimo termine.

QUESITO II. *Dato* p, r, s *trovar* u.

La formola è $u = \frac{p+rs-s}{r}$, vale a dire si aggiunga al primo termine il prodotto dell'esponente della ragione per la somma de' termini; da questo si sottragga la medesima somma de' termini, e il residuo si divida per l'esponente della ragione. Così nella detta progressione al primo termine 2 si aggiunga il prodotto dell'esponente 2 moltiplicato per la somma de' termini 62, il qual prodotto è 124, e avremo 126; da bau-

questo si sottragga la somma dei termini 62, resteranno 64; questo si divida per l' esponente 2, e avremo 32 come sopra.

CAPO IV.

Trovar il primo termine.

QUESITO I. *Dato* u, r, n, *trovar* p.

La formola è $p = \frac{u}{rn-1}$; vale a dire si divida l'ultimo termine per l' esponente della ragione alzato ad una potenza di tanti gradi, quanto è il numero dei termini meno 1. Così nella medesima progressione ∴ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 dividendo l'ultimo termine 32 per l'esponente 2 alzato alla quarta potenza, cioè per 16, avremo 2 eguale al primo termine.

QUESITO II. *Dato* n, r, s, *trovar* p.

La formola è $p = \frac{rs-s}{rn-1}$, vale a dire si moltiplichi l' esponente della ragione per la somma dei termini; dal prodotto si sottragga la stessa somma dei termini; il residuo si divida per l' esponente alzato ad una potenza di tanti gradi quanto è il numero de' termini, sottraendo però dalla detta potenza un' unità. Così nella predetta progressione moltiplicando l' esponente 2 per la somma dei termini 62, avremo 124; sottraendone la medesima somma 62, resteranno 62; dividendo questi per l' esponente 2 alzato alla quinta potenza, che dà 32, diminuita però questa quinta potenza di un' uni-

unità, onde resta 31 ; il quoto darà per primo termine 2 come sopra.

QUESITO III. *Dato* u, r, s *trovar* p.

La formola è $p = ur + s - rs$; vale a dire si moltiplichi l'ultimo termine per l'esponente della ragione ; vi si aggiunga la somma de'termini, e se ne sottragga la stessa somma dei termini moltiplicata per l'esponente della ragione. Così nella medesima progressione moltiplicando l'ultimo termine 32 per l'esponente 2, avremo 64; aggiugnendovi la somma dei termini 62, avremo 126; e sottraendone la somma dei termini moltiplicata per l'esponente, che fa 124, resteran 2 come sopra.

CAPO V.

Trovar l'esponente della ragione.

QUESITO I. *Dato* p, u, s *trovar* r.

La formola è $r = \frac{s - p}{s - u}$; vale a dire dalla somma dei termini si sottragga il primo termine ; e il residuo si divida per la medesima somma meno l'ultimo termine. Così nella suddetta progressione ÷ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 sottraendo il primo termine 2 dalla somma dei termini 62, avremo 62 meno l'ultimo termine 32, cioè per 30, avremo 2 eguale all'esponente della ragione.

QUESITO II. *Dato* p, u, n *trovar* r.

La formola è $r = \frac{\sqrt[n-1]{u}}{\sqrt[n-1]{p}}$; vale a dire

si divida l'ultimo termine pel primo termine, e dal quoto si estragga una radice di tanti gradi, quanto è il numero dei termini meno 1. Così nella stessa progressione dividendo l' ultimo termine 32 pel primo termine 2 abbiamo 16, ed estraendo da questo la radice quarta, abbiamo 2 come sopra.

CAPO VI.

Trovare il numero dei Termini.

IL numero dei termini nella progressione geometrica per mezzo delle formole provenienti dalle due accennate equazioni fondamentali non può trovarsi senza ricorrere ai logaritmi; coll' ajuto de' quali in qual modo ritrovisi, potrà vedersi nel succitato Corso di Matematica del Sig. Ab. *Bossut* Vol. I. Cap. XI. dell' Algebra pag. 308. Chi però non sa il calcolo dei logaritmi, potrà supplirvi nei modi seguenti.

QUESITO I. *Dato* p, r, u *trovar* n.

Si moltiplichi il primo termine per l'esponente della ragione fino a tanto che si arrivi ad aver per prodotto l' ultimo termine; e il numero delle moltiplicazioni fatte, più 1 darà il numero dei termini. Così nella predetta progressione dato il primo termine 2, l' esponente della ragione 3, e l'ultimo termine 32, moltiplicando quattro volte il primo termine per l' esponente della ragione avremo l'ultimo; e il numero dei termini sarà 4 più 1, ossia 5. Infatti delle dette moltiplicazioni si avrà appunto

la

la progressione ÷ 2 : 4 : 8 : 16 : 32.

QUESITO II. *Dato* p, u, s *trovar* n.

Si cerchi prima colla formola del Quesito I. del Cap. V. l' esponente della ragione; e trovato questo, si proceda come nel Quesito precedente. Infatti nella proposta progressione l'esponente della ragione si troverà esser 2; e conosciuto questo, il numero dei termini si scoprirà esser 5 come sopra.

Per applicazione delle regole precedenti aggiugneremo quì alcuni Quesiti pratici.

CAPO VII.

Quesiti pratici di progressioni geometriche.

QUESITO I. *Uno dà in affitto un podere per* 24 *anni, esigendo* 2 *soldi del primo anno,* 4 *pel secondo,* 8 *pel terzo, e così sempre raddoppiando. Si cerca quanto avrà in tutto al fine della locazione?*

Quì abbiamo una progressione geometrica, di cui il primo termine è 2, l' esponente della ragione è parimente 2, e il numero dei termini è 24; e trattasi di trovarne la somma.

Si dovrà dunque precedere come nel Quesito II. del Capo II., la cui formola è *s*

$$= \frac{prn - p}{r - 1}$$

S' innalzi pertanto l' esponente 2 alla 24 potenza, e avremo ss. 16777216; questo numero si moltiplichi pel primo termine 2, e verranno ss. 33554432; se si sottragga il pri-

primo termine 2, e resteranno ss.33554430; che divisi per l'esponente 2 meno 1, cioè per 1, rimarranno come prima ss.33554430, e convertiti in lire daranno l. 1677721, 10: a tanto ascende colla progressione geometrica dopo un certo numero di termini la somma di un prezzo che a principio sembrava tenuissimo.

AVVERTIMENTO. Allo stesso modo si sciolgono parecchi altri Quesiti di questa specie, che si sogiion proporre cercando la somma de' termini dato il primo termine, l'esponente della ragione, e il numero de' termini; quello per esempio di un cavallo, per prezzo di cui il Venditore domanda un soldo pel primo chiodo de' suoi ferri, 2 pel secondo, 4 pel terzo ec., ed essendo i chiodi 24 in tutto, si cerca il prezzo totale, che trovasi ascendere a ss. 16777216, e perciò a l. 838860, 16.

QUESITO II. " Uno prende a coltivare un paese incolto. Il primo anno vi semina uno stajo di grano, e ne raccoglie 3 staja; il secondo anno accrescendo la coltura vi semina le tre staja, e ne raccoglie 9. Continua così per 9 anni seminando sempre tutto il raccolto, e ricavandone sempre il triplo del seminato. Domandasi quanto grano egli abbia raccolto al nono anno"?

Quì abbiamo una progressione di cui il primo termine è 1; l'esponente della ragione è 3, il numero dei termini è 9, e trattasi di trovare l'ultimo termine.

Si dovrà dunque operare come nel Que-

sito

sito I. del Capo III., la cui formola è $u = prn - 1$.

S'innalzi perciò l'esponente 5 all'8va, potenza, e avremo staja 6561, che moltiplicato pel primo termine 1 rimarran come prima, e daranno il cercato numero delle staja raccolte il nono anno.

QUESITO III. " A parte da un luogo facendo ogni giorno non si sa quante miglia; B gli tien dietro partendo dal medesimo luogo il giorno appresso, e dopo miglia 121 il raggiugne, avendo fatto con una progressione geometrica, non si sa quale, al primo giorno 1 miglio, e all' ultimo miglia 81. domandasi 1. qual fosse l' esponente della ragione nella progressione di B; 2. dopo quanti giorni B abbia raggiunto A; 3 qual viaggio facesse A ogni giorno?

I. Parte. In questa trattasi di trovar l' esponente della ragione, dato il primo termine, l' ultimo termine, e la somma.

Si dovrà dunque procedere come nel Quesito I. del Capo V, la cui formola è $r = \frac{s - p}{s - u}$.

Si sottragga pertanto il primo termine 1 dalla somma 121, e resteran 120; questo residuo si divida per la somma 121 meno l' ultimo termine 81, cioè per 40; e il quoto 3 esprimerà il cercato esponente della ragione.

II. Parte. Essendo 3 l' esponente della ragione, 1 il primo termine, e l' ultimo

81,

81, avrem la progressione ÷ 1 : 3 : 9 : 27 : 81, e perciò il numero dei termini, ossia quì il numero de' giorni, in cui B ha raggiunto *A*, sarà 5.

III. Parte. Essendo *A* partito un giorno prima, avrà viaggiato 6 giorni, ed essendo stato raggiunto dopo miglia 121, dividendo questo numero per 6, troveremo che avrà fatto ogni giorno miglia 20 $\frac{1}{6}$.

QUESITO IV. " Ad un Negoziante di vino uno offre 20 zecchini ogni giorno per 20 giorni di seguito col patto di averne 1 boccale al primo giorno, 2 al secondo, 4 al terzo, 8 al quarto, e così sempre raddoppiando. Si cerca 1. quanti boccali ne dovrà avere l' ultimo giorno; 2. quanti boccali ne avrà in tutto; 3. quanto costerà il vino alla brenta ".

I. Parte. Quì cercasi l' ultimo termine dato il primo termine, l' esponente della ragione, e il numero dei termini.

Si preceda adunque come nel Quesito I. del Capo III., la cui formola è $u = prn - 1$.

S' innalzi pertanto l' esponente 2 alla 19 potenza che sarà 524288, e siccome questa moltiplicata pel primo termine 1 rimarrà tuttavia la stessa, così indicherà che tale è l' ultimo termine, vale a dire che al ventesimo giorno dovrà avere boccali 524288, che divisi per 96 danno 5461 $\frac{1}{3}$.

II. Parte. Per trovare la somma de' termini avevam prima 3 dati, cioè il primo termine, l' esponente della ragione, e il nume-

mero dei termini. Or sapendo anche l' ultimo termine, avrem quattro dati, per cui la somma potrà ritrovarsi in tutte e quattro le maniere indicate nei quattro Quesiti del Capo II. vale a dire o cercandola coi dati p, n, r come nel Quesito I., o coi dati p, n, r come nel II., o coi dati u, n, r come nel III, o coi dati p, u, n come nel IV.

Noi la cercheremo col metodo del I Quesito, che è il più spedito, essendo la sua formola $s = \frac{ru - p}{r - 1}$.

Si moltiplichi adunque l' ultimo termine 524288 per l' esponente 2, e avremo boccali 4048576; se ne sottragga il primo termine 1, e resteranno boccali 1048575, che divisi per l' esponente 2, meno 1, cioè per 1, sussisteranno gli stessi, e divisi per 96 daranno brente 10922, e boccali 63.

III. Parte. Zecchini 20 moltiplicati per 20 giorni daranno 400 zecchini; questi moltiplicati per l. 15, 4 faranno l. 6080; per cui dividendo le brente 10922 $\frac{2}{3}$ (giacchè boccali 63 son vicinissimi a $\frac{2}{3}$ di una brenta) il prezzo risulterà lire l. 15. 11 per brenta con un piccol residuo.

SEZIONE IV.

DELLE COMBINAZIONI, E DELLE ALTERNAZIONI, O PERMUTAZIONI.

LA parola *combinazione* propriamente significa l' unione di più cose a due a due; ma più generalmente si prende per l'unione di più cose secondo qualunque numero, cioè a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro ec.

L' *alternazione* o *permutazione* ha un significato ancor più esteso; imperocchè non solo abbraccia le diverse maniere, con cui più cose si possono combinare a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro ec.; ma ancora le diverse maniere con cui in queste combinazioni si posson disporre le une rispetto alle altre collocandole o prima o dopo. Così per esempio le tre lettere *a*, *b*, *c* prese due a due non possono avere che tre combinazioni, cioè *ab*, *ac*, e *bc*; ma aver possono sei alternazioni, cioè *ab*, *ba*, *ac*, *ca*, *bc*, *cb*.

Noi quì darem prima le regole, con cui in qualunque dato numero di cose trovar si possono tutte le loro combinazioni possibili; poi quelle, con cui nelle medesime trovar si possono tutte le loro possibili alternazioni.

CA-

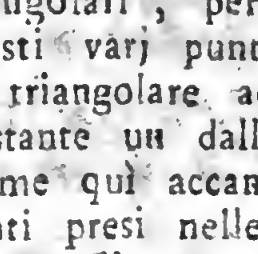
CAPO I.
Delle Combinazioni.

ARTICOLO I.
Delle Combinazioni di più cose due a due.

DUe cose sole, come *a* e *b* combinar non si possono che in una sola maniera, cioè *ab*. Tre cose, per esempio *a*, *b*, *c* combinate due a due formano tre combinazioni, cioè *ab*, *ac*, *bc*. Quattro cose *a*, *b*, *c*, *d* unite due a due danno 6 combinazioni, cioè *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*. Cinque sono *a*, *b*, *c*, *d*, *e* unite come sopra fan 16 combinazioni, vale a dire *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *bc*, *bd*, *be*, *cd*, *ce*, *de*. Proseguendo noi troveremo che sei cose prese due a due forniscono 15 combinazioni; sette ne danno 21, e così successivamente.

In genere adunque il numero delle combinazioni, che risulta da 2, 3, 4, 5, 6, 7, o più quantità prese due a due è secondo la serie seguente 1, 3, 6, 10, 15, 21 ec., la qual si chiama la serie dei *numeri triangolari*, cioè di quei numeri che rappresentan la serie delle somme di una propressione naturale. Infatti data la progressione ÷ 1. 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 ec., la somma del primo termine è 1; quella dei due primi è 3; quella dei tre primi è 6; quella dei primi quattro è 10; dei primi cinque è 15; dei primi 6 è 21 ec.

AVVERTIMENTO. Questi numeri chiamansi triangolari, perchè disposti varj punti in figura triangolare ad eguali distanze un dall' altro, come qui accanto; i punti presi nelle linee orizzontali vengon crescendo nella progressione naturale, 1. 2. 3. 4. 5. ec., e i triangoli da lor formati, e contenenti le loro somme, crescono appunto nella serie 2. 3. 6. 10. 15 ec. Poichè il triangolo *ABC* che comprende la somma dei primi due termini, contiene 3 punti; *ADE* ne contiene 6; *AFG* ne contiene 10; *AHI* ne contiene 15 ec.



Ciò posto essendo il numero delle combinazioni di più quantità prese due a due eguale alla somma di una progressione naturale che abbia tanti termini, quante sono le quantità date meno 1, questo numero di combinazioni si troverà facilmente, cercando colle regole delle progressioni aritmetiche la somma della detta progressione naturale.

Così date 4 quantità da combinarsi due a due; fatta la progressione naturale :— 1. 2. 3, la somma di questa che è 6, esprimerà il numero delle combinazioni. Date 5 quantità, il numero delle combinazioni due a due sarà eguale alla somma della progressione :— 1. 2. 3. 4, la qual somma è 10; e così del resto.

In genere poi siccome la somma di qualun-

lunque progressione aritmetica si trova (V. pag. 96) col moltiplicare la somma del primo ed ultimo termine per la metà del numero de' termini ; così dato qualunque numero di quantità ; se chiameremo questo numero n, il numero de' termini della corrispondente progressione naturale sarà $n-1$, l' ultimo termine, che nella progressione naturale è uguale al numero de' termini, sarà anch' esso uguale ad $n-1$, il primo termine sarà 1, che tale è sempre il primo termine della progressione naturale ; e la formola per trovare il numero delle combinazioni a due a due, chiamando questo numero Cc, sarà $Cc = (n-1+1) \times \frac{n-1}{2}$, ossia $= n \times \frac{n-1}{2}$. Laonde se le quantità saran 6, moltiplicando 6 per la metà di 6 — 1, cioè per $2\frac{1}{2}$, il numero delle combinazioni si troverà eguale a 15. Se le quantità saran 7, moltiplicando 7 per la metà di 7 — 1, cioè per 3, il numero delle combinazioni sarà 21. Se le quantità saran 30, moltiplicando 30 per la metà di 30 — 1, cioè per $14\frac{1}{2}$, il numero delle combinazioni sarà 435; e così per qualunque altro numero.

ARTICOLO II.

Delle combinazioni di più cose tre a tre.

DAte tre cose solamente, come a, b, c, esse non possono fornire che una sola com-

binazione *abc*. Se le cose saran quattro *a*, *b*, *c*, *d*, prese tre a tre esse daranno quattro combinazioni *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*. Se saran cinque *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, forniranno le 10 combinazioni *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*, *abe*, *bde*, *bce*, *ace*, *ade*, *cde*. Se saran 6, avremo 20 combinazioni; se saranno 7, avremo 35 combinazioni; e così seguitando.

Il numero adunque delle combinazioni di 3, 4, 5, 6, 7, o più quantità prese tre tre è secondo la seguente serie 1, 4, 10 a 20, 35, che si chiama de' *numeri piramidali*, cioè di quelli che rappresentan la serie delle somme de' numeri triangolari. Infatti dati i numeri triangolari, 1, 3, 6, 10, 15, la somma del primo termine sarà 1, quella dei due primi 4, quella dei tre primi 10, quella de' primi quattro 20, quella dei primi cinque 35 ec.

AVVERTIMENTO. Questi numeri si chiamano piramidali, perchè formando una piramide triangolare, le cui facce siano tutte eguali al succennato triangolo fatto di punti posti ad eguali distanze un dall'altro, e tagliando questa piramide con tanti piani orizzontali paralleli fra loro, e un dall'altro equidistanti; il vertice della piramide non conterrà che un sol punto, ma la piramide che nascerà dalla prima sezione cominciando dall'alto, ne conterrà 4, la seconda 10, la terza 20, la quarta 35, e così in seguito.

Or dato qualunque numero di quantità da combinarsi tre a tre, il numero delle combinazioni si troverà facilmente colla seguen

te formola $Ccc = n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$;

vale a dire il dato numero di quantità si moltiplichi per la metà dello stesso numero meno 1, indi il prodotto si moltiplichi nuovamente per la terza parte dello stesso numero meno 2. Così se le quantità saran quattro, moltiplicando il 4 per la metà di 3, cioè per $1\frac{1}{2}$ avremo 6, e moltiplicando questo per la terza parte di 2, cioè per $\frac{1}{3}$, avremo $\frac{12}{3}$, ossia 4 pel numero delle combinazioni a tre a tre delle quattro quantità date. Se le quantità saran cinque, moltiplicando il 5 per la metà di 4, cioè per 2 avrem 10, e moltiplicando questo per la terza parte di 3, cioè per 1, resteran 10. Se le quantità saran 7, moltiplicando il 7, per la metà di 6, cioè per 3, avrem 21, e moltiplicando questo per la terza parte di 5, cioè per $\frac{5}{3}$ avrem $\frac{105}{3}$, ossia 35. Finalmente se le quantità saran 30, moltiplicando il 30 per la metà di 29, cioè per $14\frac{1}{2}$ avremo 435, e moltiplicando questo per la terza parte di 28, cioè per $9\frac{1}{3}$, avremo 4060.

L'operazione può anche farsi in altro modo, il quale riesce allo stesso, cioè moltiplicando prima fra loro tutti i numeratori, poi moltiplicando fra loro tutt'i denominatori, e finalmente dividendo il prodotto degli uni per quello degli altri. Così nell'ultimo esempio moltiplicando il 30 per 29 avremo 870; moltiplicando questo per 28 avremo 24360; e dividendo questo pel prodotto dei

denominatori, cioè per 6, avrem per quoto 4060 come sopra.

ARTICOLO III.

Delle combinazione di più cose quattro a quattro, cinque a cinque ec,

LA formola per le combinazioni di qualunque numero di quantità a quattro a quattro si è $Cccc = n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$; quella per le eombinazioni di più quantità a cinque a cinque si è $Ccccc = n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5}$; così date 20 cose da combinarsi quattro a quattro, si moltiplichi (procedendo nella seconda maniera testè accennata) il 20 per 20 — 1, ossia per 19, e avremo 380; questo si moltiplichi per 20 — 2, ossia per 18, e avremo 9840; questo pur si moltiplichi per 20 — 3, ossia per 17, e avremo 68880; il qual numero diviso pel prodotto dei 3 denominatori 2, 3, 4, ossia per 24 darà 2870 pel cercato numero delle combinazioni.

Se le 20 quantità date saranno da combinarsi cinque a cinque, il numero trovato di sopra 68880 si moltiplichi nuovamente per 20 — 4, ossia per 16, e avrem 1102080, il qual numero diviso pel prodotto dei denominatori 2, 3, 4, 5, ossia per 120, darà

rà pel cercato numero delle combinazioni 9184.

In genere qualunque sia il numero delle quantità date, e qualunque il numero, secondo cui avrannosi a combinare fra loro, per trovare il numero delle combinazioni, basterà moltiplicare il numero n delle date quantità per questo medesimo numero meno 1, meno 2, meno 3 ec., e dividerne il risultato pel prodotto di $2 \times 3 \times 4$ ec. coll'avvertenza, che l'ultimo denominatore sia eguale al numero secondo cui le quantità si avranno a combinare, e il numero da sottrarsi dal corrispondente numeratore sia sempre un'unità meno del denominatore. Così se 20 quantità avrannosi a combinare otto a otto, avremo $20 \times \frac{20-1}{2} \times \frac{20-2}{3} \times \frac{20-3}{4} \times \frac{20-4}{5} \times \frac{20-5}{6} \times \frac{20-6}{7} \times \frac{20-7}{8}$; e moltiplicando fra loro i numeratori avremo 3, 008, 678, 400; moltiplicando fra loro i denominatori avremo 40320; finalmente dividendo un prodotto per l'altro, il numero delle combinazioni risulterà a 74620.

CAPO II.

Delle Alternazioni.

LA regola per trovare il numero delle alternazioni, o permutazioni è ancor più semplice, e più facile, che quella per le combinazioni.

Due cose, come due lettere *a*, *b* variare si possono in due maniere *ab*, *ba*; tre cose, come *a*, *b*, *c* si possono variare in 6 maniere *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*. Ciò proviene da questo, che in ciascuna delle due prime variazioni *ab*, *ba* la terza lettere *c* può collocarsi in tre maniere cioè al principio, al mezzo, e al fine, il che fa che le alternazioni delle tre lettere *a*, *b*, *c*, debbon essere eguali a 2 moltiplicato per 3, cioè a 6. Nello stesso modo si vedrà, che in ciascuna delle 6 alternazioni delle tre lettere *a*, *b*, *c* una quarta lettera *d* può disporsi in 4 maniere, onde le alternazioni delle 4 lettere *a*, *b*, *c*, *d* saranno eguali a 6 moltiplicato per 4, ossia a 24. In simil guisa si troverà, che le alternazioni di 5 lettere *a*, *b*, *c*, *d*, *e* saranno eguali a 25 moltiplicato per 5, ossia a 120; e così di seguito.

Dato pertanto qualunque numero di cose, per esempio 10 lettere, il numero delle loro alternazioni, ossia delle diverse maniere, con cui si potranno disporre, si troverà scrivendo l'un dopo l'altro tutti i numeri dall' 1 fino al numero dato, e moltiplicandoli successivamente gli uni per gli altri.

Co-

Così qui le alternazioni di 10 lettere saranno eguali a 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × 7 × 8 × 9 × 10, ossia eguali a 3, 628,800.

Che se di ciascuna specie s' avranno più individui, le alternazioni cresceranno assai più, e con una diversa proporzione.

Imperocchè se avremo due *a*, e due *b*, le variazoni due a due non saran più solamente *ab*, e *ba*, ma converrà aggiugnerne due altre *aa*, e *bb*, che in tutto faranno 4; se avremo due *a*, due *b*, e due *c*, le variazioni due a due saranno 3 per le combinazioni *ab*, *ac*, *bc*, 3 per le alternazioni *ba*, *ca*, *cb*, e 3 per le duplicazioni *aa*, *bb*, *cc*, in tutto 9.

Or quì vedesi, che le variazioni di 2 cose prese due a due sono eguali al quadrato di 2, cioè a 4; le variazioni di 3 cose prese similmente due a due sono eguali al quadrato di 3, cioè a 9. Allo stesso modo si troverà, che le variazioni di qualunque numero di cose prese due a due sarà eguale al quadrato di questo numero.

Colla stessa ricerca si troverà, che se avremo 3 *a*, 3 *b*, 3 *c*, si potran questi disporre in 27 maniere ch' è il cubo di 3; se avremo 4 *a*, 4 *b*, 4 *c*, e 4 *d*, questi a quattro a quattro si potranno disporre in 256 maniere, ch' è la quarta potenza di 4.

In genere adunque se si avranno più specie di cose, e di ciascuna specie si avranno tanti individui, quanto è il numero secondo il quale si debbono distribuire, il numero delle variazioni sarà eguale al numero delle spe-

specie alzato ad una potenza di tanti gradi, quanto è il numero secondo cui le cose debbono distribuirsi. Laonde le 23 lettere dell'alfabeto a cagion d' esempio disposte come sopra due a due daranno un numero di variazioni eguale al quadrato di 23. disposte 3 a 3 daran tante variazioni quanto è il cubo di 23, disposte 4 a 4 daranno le variazioni corrispondenti alla quarta potenza di 23; e così di seguito.

Chi poi volesse avere la somma di tutte le variazioni possibili di 23 lettere prese una a una, due a due, tre a tre, quattro a quattro ec. non avrebbe che a far la somma della progressione geometrica $\div$ $23 : 23^2$ $23^3 : 23^4$ ec. fino a 23^{23}; nella quale progressione essendo il primo termine 23, l' esponente della ragione parimente 23, e l' ultimo termine 23^{23}, secondo il I. Quesito del Capo II delle progressioni geometriche, la cui formola è $s = \frac{ru - p}{r - p}$, la somma si troverà moltiplicando l'esponente della ragione 23 per l'ultimo termine 23 alzato alla 23 potenza, sottraendo dal prodotto il primo termine 23, e dividendo il residuo per l' esponente 23 meno 1, ossia per 22.

IL FINE.

INDICE

Della III. Parte dell' Aritmetica.

SEZIONE VI.

Delle Alligazioni, o Mescolanze di Merci, o di Metalli.

Capo I. Delle Alligazioni delle Merci. pag. 3
Art. I. Dato il misto cercarne il valore. ivi
Art II. Dato il valore cercar le parti da mescolarsi. 5
Capo II. Delle Alligazioni de' Metalli. 7
Art. I. Quesiti preliminari. 18
Art II. Data la bontà, o il titolo de' componenti, trovar la bontà, e il titolo del composto. 22
Art. III. Dato il composto, trovare i componenti. 26
Art. IV. Dato il peso, il titolo, ed il valore di una Moneta, trovar quello d' un' altra, e di qualunque pezzo d' oro o d' argento, di cui sian date due delle suddette cose. 28

SEZIONE VII.

Delle False Posizioni.

Capo I. Della Falsa Posizione semplice. 32

Ca-

Capo II. Della Falsa Posizione doppia. 50
Appendice. Dei casi in cui la regola della doppia Falsa Posizione può riuscire fallace, e della maniera di distinguerli, e di rimediarvi. 86

SEZIONE VII.

Delle Progressioni Aritmetiche.

Capo I. Principj fondamentali. 95
Capo II. Trovare la Somma de' Termini. 97
Capo III. Trovare il numero de' Termini. 100
Capo IV. Trovare l'ultimo Termine. ivi
Capo V. Trovare il primo termine. 101
Capo VI. Trovare la differenza.
Riflessioni sopra le regole precedenti. ivi
Capo VII. Quesiti pratici di progressioni Aritmetiche. 103

SUPPLEMENTO

SEZIONE I.

Delle Frazioni, o Parti Decimali.

Capo I. Nozioni preliminari. 115
Capo II. Del modo di ridurre qualunque Frazione a parti decimali. 117
Capo III. Del modo di sommare, sottrarre, moltiplicare, e dividere le parti decimali. 120

SEZIONE II.

Delle Potenze, e delle Radici.

Capo I. Delle Potenze. 128

Ca-

Capo II. Delle Radici. 131
Art. I. Estrazione della Radice quadrata. 132
Art. II. Estrazione della Radice cubica 142
Art. III. Estrazione delle Radici dalle Potenze superiori. 143

SEZIONE III.

Delle Progressioni Geometriche.

Capo I. Principj fondamentali. 176
Capo II. Trovare la somma de' Termini. 187
Capo III. Trovare l'ultimo Termine. 189
Capo IV. Trovare il primo Termine. 190
Capo V. Trovar l'Esponente della Ragione. 191
Capo VI. Trovar il Numero de' Termini. 192
Capo VII. Quesiti pratici di Progressioni geometriche. 193

SEZIONE IV.

Delle Combinazioni, e delle Alternazioni o Permutazioni.

Capo I. Delle Combinazioni. 199
Art. I. Delle combinazioni di più cose due a due. ivi
Art. II. Delle combinazioni di più cose tre a tre. 201
Art. III. Delle combinazioni di più cose quattro a quattro, cinque a cinque ec. 204
Capo II. Delle Alternazioni. 206

1146350